LILAVATI

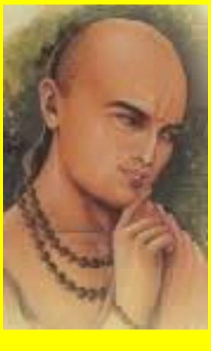
OF

BHASKARACHARYA

WITH THE

"TATTVAPRAKASHIKA"

HINDI COMMENTARY



उपोद्घात

रम्ये कर्णाटके देशे सह्यपर्वतसन्निधौ ।
बीजापुराभिधग्रामे भूदेवस्य कुले तथा ॥ १ ॥
षडानलखशीतांशु (१०३६) सम्मिते शाकहायने ।
महेश्वरसुतो जातो **भास्करो** लोकभास्करः ॥ २ ॥
द्विसप्तदिग्मिते (१०७२) शाके ग्रन्थोऽयं तेन निर्मितः ।
विरसं सरसं कृत्वा सच्छन्दोभिरलङ्कृतः ॥ ३ ॥
'लीलावती' समो ग्रन्थो गणिते नास्ति भूतले ।
ग्रन्थोऽयं तेन सर्वत्र परीक्षासु प्रतिष्ठितः ॥ ४ ॥
व्यक्तपाटीविधानेषु भास्करीयोऽतिसंस्फुटः ।
यस्याभ्यासेन मन्दोऽपि गणितज्ञो भविष्यति ॥ ५ ॥
यद्यप्यस्य कृताष्टीकाः सन्त्यनेकास्तथापि ताः ।
नोपयुक्ता विशेषेण छात्रेभ्यः साम्प्रतं खलु ॥ ६ ॥
विचार्यैवं सुबुद्धया हि टीकेयं लिखिता मया ।
तस्यां ग्रन्थक्रमादेव परिशिष्टानि सन्ति वै ॥ ७ ॥
तत्रोदाहरणैः, सार्धं नवीनगणितस्य च ।
रीतिः प्रदर्शिता येन, ज्ञानं तस्यापि जायताम् ॥ ८ ॥
प्रश्ना बुद्धिविवृद्धयर्थं सन्त्यनेकाः सुखावहाः ।
त्रिभुजादेः फलस्यापि गणितं तत्र प्रस्फुटम् ॥ ९ ॥
अनया यदि छात्राणामुपकारो भवेल्लघु ।
तदा मे श्रमसाफल्यमन्यथा विफलः श्रमः ॥ १० ॥
प्रमादाद् बुद्धिदोषाद्वा कण्टकाक्षरजाऽपि वा ।
या त्रुटिः सा बुधैः शोध्या भ्रमः स्वाभाविको यतः ॥ ११ ॥

इति विनीतो

लषणलालः

भूमिका

इस ग्रन्थ के प्रणेता भारत-विभूति सर्वतन्त्रस्वतंत्र दैवज्ञकुल-कमल-प्रभाकर पण्डित श्री भास्कराचार्य हैं। इनका जन्म शाके १०३६ में कर्णाटक देशस्थ सह्य पर्वत के समीप बीजापुर गाँव में हुआ। ये वैष्णवसम्प्रदाय के कर्णाटक ब्राह्मण थे। इनके पिता का नाम महेश्वर था।

ग्रन्थकार थोड़े ही समय में अपने पिता से पढ़कर अद्वितीय गणितज्ञ हो गये। ३६ वर्ष की अवस्था में उन्होंने 'सिद्धान्तशिरोमणि' की रचना की। उक्त ग्रन्थ में लीलावती, बीजगणित, गणिताध्याय एवं गोलाध्याय ये चार भाग हैं।

लीलावती पाटीगणित है। कुछ लोगों का कथन है कि ग्रन्थकार ने अपनी भार्या या लड़की के नाम पर ग्रन्थ का यह नाम रखा है। ग्रन्थकार के पुत्र पौत्रादि का अस्तित्व डाक्टर भाउदाजी के ताम्रपत्र से प्रमाणित होता है। शाके ११०५ में ग्रन्थकार ने 'करण कुतूहल' नाम का ग्रन्थ बनाया, इससे स्पष्ट है कि ६९ वर्ष से अधिक अवस्था में आचार्य का देहावसान हुआ।

प्रकृत ग्रन्थ का अनुवाद १५८७ ई० में अकबर बादशाह की आज्ञा से फैजी ने फारसी में किया। १८१६ ई० में टेलर साहब एवं १८१७ ई० में हेनरी-टाम्स कोलब्रूक साहब ने अंग्रेजी में इस ग्रन्थ का अनुवाद किया। अनन्तर कई भाषाओं में भी इसका अनुवाद हुआ। गणित विषयक नीरस ग्रन्थ को ग्रन्थकार ने सरस काव्य का रूप दिया। इसके श्लोक बहुत सुन्दर और सरस हैं। व्याकरण, छन्द और अलंकार से अलंकृत होने से ग्रन्थ पढ़ने में बहुत आनन्द आता है। काव्य की आत्मा रस है और इसकी अनुभूति इसके पढ़ने से अनायास प्रतीत होती है।

ग्रन्थकार में ज्योतिष शास्त्र के अतिरिक्त आठों व्याकरण, दर्शन एवं साहित्य की विशिष्ट योग्यता थी। उनके ग्रन्थ में कई जगह ऐसे शब्द हैं जो पाणिनीय व्याकरण से सिद्ध नहीं होते। भाष्य के प्रति अक्षर सयुक्तिक और गिने हुये हैं। दूसरे मत का खण्डन करने का अवसर आचार्य को जहाँ मिला है वहाँ बहुत सभ्यता के साथ मधुर शब्दों में किया है। प्रकृत ग्रन्थ में एक जगह

उन्होंने लिखा है—'पूर्वैः कृतं यद्गुरु तन्न विघ्नः'। चल गणित के हेतु लेवनिज एवं न्यूटन आदि गणितज्ञों की आजकल बड़ी प्रशंसा होती है, किन्तु हमारे आचार्य उनसे बहुत पहले ही सूत्ररूप में चल गणित लिख छोड़े हैं। प्राचीन गणित ग्रन्थ में बहुत से गणित सूत्ररूप में रहते हुये भी भारतीय गणक द्वार विकसित न होकर विदेशी गणितज्ञ द्वारा प्रकाश में आये। इस हेतु वे स्तुत्य हैं। ग्रन्थकार की योग्यता पर प्रकाश डालना वैसा ही है जैसा कि सूर्य के सामने दीपक दिखाना हो। वे महापुरुष थे। उन्होंने ८ सौ वर्ष पूर्व जो कुछ लिखा, उसका आदर वर्तमान युग में भी सर्वत्र हो रहा है।

भास्करीय पाटीगणित से पूर्व ब्रह्मगुप्त, श्रीधर, आर्यभट, लल्ल, प्रभाकर बलभद्र, श्रीपति और पद्मनाभ आदि के पाटीगणित थे। इस ग्रन्थ के आधा विशेषरूप से ब्रह्मगुप्त और श्रीधर के पाटी गणित हैं।

श्रीधर ने गुणन रीति का नाम कपाट सन्धि एवं गुणनफल का नाम प्रत्युत्पन्न रखे हैं। ब्रह्मगुप्त भी गुणनफल को प्रत्युत्पन्न कहते हैं।

श्रीधर का सूत्र :—

उत्सार्योत्सार्य ततः कपाटसन्धिर्भवेदिदं करणम्।
तस्मिंस्तिष्ठति यस्मात् प्रत्युत्पन्नस्ततस्तत्स्थः॥

श्रीधर के समान लीलावती की प्रथम गुणनरीति है, शेष ग्रन्थकार के हैं।

ब्रह्मगुप्त की भागहार विधि भास्कर से भिन्न है। इस ग्रन्थ में श्रीधर वर्गविधि और ब्रह्मगुप्त की घनविधि ली गई है। अवर्गाङ्क के आसन्न निकालने की रीति श्रीधर की त्रिशतिका के समान है। आर्यभट ने भिन्न वर्ग और घन लिखे हैं। किन्तु ब्रह्मगुप्त और श्रीधर ने भिन्नाङ्क की सारी व लिखी हैं। आर्यभट के कुट्टाकार (कुट्टक) गणित में जिस तरह महत्तमापव की विधि है, उसी तरह लीलावती में भी है। आचार्य ने लघुतमापवर्त्य गणित नहीं लिखा।

दशमलव की विधि अंग्रेजी राजकाल से प्रचलित हुई है। भारत में रीति के प्रवर्तक पं० मोहनलाल आदि हुये हैं।

संस्कृत के ज्यौतिषी ग्रहगणित में साठ-साठ हिस्से को लेते हैं। प्रच दसगुने स्थानों से जो संख्या लिखी जाती है, उसकी दूसरी रीति दश

संख्या है। नवीन गणितज्ञों ने ग्रहगणित में साठ-साठ भागवाली विजातीय संख्या के हिसाब को छोड़कर दशमलव की विधि चलायी।

विलोम विधि आर्यभट से सूक्ष्म ब्रह्मगुप्त की है। लीलावती में ब्रह्मगुप्त की रीति है। ब्रह्मगुप्त का प्रमाण :—

गुणकश्छेदश्छेदो गुणको धनमृणमृणधनं कार्यम्।
वर्गः पदं पदं कृतिरन्त्याद्विपरीतमाद्यं तत्॥

राशि में जहाँ राशि का ही कुछ अंश जोड़ा या घटाया गया हो, वहाँ विलोम विधि में क्या करना चाहिये, इसे केवल ग्रन्थकार ने ही बताया।

इष्टकर्म, संक्रमण, गुणकर्म, वर्गकर्म और त्रैराशिक आदि गणित प्राचीन ग्रन्थों में भी हैं, किन्तु भास्कर ने उन गणितों पर अधिक प्रकाश डाला है। यह ग्रन्थकार की विशेषता है।

'द्वीष्ट कर्म' की विधि प्राचीन ग्रन्थों में पृथक् नहीं है, लेकिन महापात निकालने में ज्यौतिषी लोग जो दो इष्ट मानकर क्रिया करते हैं, वही द्वीष्ट कर्म का भेद है। इधर पूज्यवर वापूदेव शास्त्री के समय से लीलावती की टिप्पणी में द्वीष्ट कर्म विधि लिखी गयी है। संकलित गणित का नाम आर्यभट ने चिति रखा है। आर्यभटीय के गणित पाद में योगान्तर श्रेढ़ी की योग विधि है।

प्रमाण :—

इष्टं व्येकं दलितं सपूर्वमुत्तरगुणं समुखमध्यम्।
इष्टगुणितमिष्टधनं त्वथवाद्यन्तं पदार्धहतम्॥

यहाँ इष्ट से पद, इष्टधन से सर्वधन और पूर्व से आदि समझना चाहिये यही प्रकार लीलावती में भी है। ब्रह्मगुप्त ने चिति का नाम हटा कर संकलित संकलित-संकलित रखा। आज भी वही व्यवहृत है।

आर्यभट एवं ब्रह्मगुप्त ने गुणोत्तर श्रेढ़ी के गणित नहीं लिखे, किन्तु द्वितीय आर्यभट ने महासिद्धान्त में एवं पृथूदक स्वामी ने अपने ग्रन्थ में इसे लिखा है लीलावती का आधार स्वामी जी का गणित हो सकता है। क्षेत्रव्यवहार आदि के गणित भी प्राचीन ग्रन्थों में हैं। इसकी सम्पूर्ण विवेचना से लेख विस्तृत होने की आशंका है, अतः यहाँ इतना ही कहना पर्याप्त है कि प्राचीन गणित विकास में सर्वाधिक श्रेय ग्रन्थकार को है।

उन्होंने लिखा है—'पूर्वैः कृतं यद्गुरु तन्न विघ्नः'। चल गणित के हेतु लेबनिज एवं न्यूटन आदि गणितज्ञों की आजकल बड़ी प्रशंसा होती है, किन्तु हमारे आचार्य उनसे बहुत पहले ही सूत्ररूप में चल गणित लिख छोड़े हैं। प्राचीन-गणित ग्रन्थ में बहुत से गणित सूत्ररूप में रहते हुये भी भारतीय गणक द्वारा विकसित न होकर विदेशी गणितज्ञ द्वारा प्रकाश में आये। इस हेतु वे स्तुत्य हैं। ग्रन्थकार की योग्यता पर प्रकाश डालना वैसा ही है जैसा कि सूर्य के सामने दीपक दिखाना हो। वे महापुरुष थे। उन्होंने ८ सौ वर्ष पूर्व जो कुछ लिखा, उसका आदर वर्तमान युग में भी सर्वत्र हो रहा है।

भास्करीय पाटीगणित से पूर्व ब्रह्मगुप्त, श्रीधर, आर्यभट, लल्ल, प्रभाकर, बलभद्र, श्रीपति और पद्मनाभ आदि के पाटीगणित थे। इस ग्रन्थ के आधार विशेषरूप से ब्रह्मगुप्त और श्रीधर के पाटी गणित हैं।

श्रीधर ने गुणन रीति का नाम कपाट सन्धि एवं गुणनफल का नाम प्रत्युत्पन्न रखे हैं। ब्रह्मगुप्त भी गुणनफल को प्रत्युत्पन्न कहते हैं।

श्रीधर का सूत्र :—

उत्सार्योत्सार्य ततः कपाटसन्धिर्भवेदिदं करणम्।
तस्मिंस्तिष्ठति यस्मात् प्रत्युत्पन्नस्ततस्तत्स्थः॥

श्रीधर के समान लीलावती की प्रथम गुणनरीति है, शेष ग्रन्थकार के हैं।

ब्रह्मगुप्त की भागहार विधि भास्कर से भिन्न है। इस ग्रन्थ में श्रीधर की वर्गविधि और ब्रह्मगुप्त की घनविधि ली गई है। अवर्गाङ्क के आसन्नमूल निकालने की रीति श्रीधर की त्रिशतिका के समान है। आर्यभट ने भिन्न के वर्ग और घन लिखे हैं। किन्तु ब्रह्मगुप्त और श्रीधर ने भिन्नाङ्क की सारी बातें लिखी हैं। आर्यभट के कुट्टाकार (कुट्टक) गणित में जिस तरह महत्तमापवर्तन की विधि है, उसी तरह लीलावती में भी है। आचार्य ने लघुतमापवर्त्य का गणित नहीं लिखा।

दशमलव की विधि अंग्रेजी राजकाल से प्रचलित हुई है। भारत में इस रीति के प्रवर्तक पं० मोहनलाल आदि हुये हैं।

संस्कृत के ज्योतिषी ग्रहगणित में साठ-साठ हिस्से को लेते हैं। प्रचलित दसगुने स्थानों से जो संख्या लिखी जाती है, उसकी दूसरी रीति दशमलव

संख्या है। नवीन गणितज्ञों ने ग्रहगणित में साठ-साठ भागवाली विजातीय संख्या के हिसाब को छोड़कर दशमलव की विधि चलायी।

विलोम विधि आर्यभट से सूक्ष्म ब्रह्मगुप्त की है। लीलावती में ब्रह्मगुप्त की रीति है। ब्रह्मगुप्त का प्रमाण :—

गुणकश्छेदश्छेदो गुणको धनमृणमृणधनं कार्यम्।
वर्गः पदं पदं कृतिरन्त्याद्विपरीतमाद्यं तत्॥

राशि में जहाँ राशि का ही कुछ अंश जोड़ा या घटाया गया हो, वहाँ विलोम विधि में क्या करना चाहिये, इसे केवल ग्रन्थकार ने ही बताया।

इष्टकर्म, संक्रमण, गुणकर्म, वर्गकर्म और त्रैराशिक आदि गणित प्राचीन ग्रन्थों में भी हैं, किन्तु भास्कर ने उन गणितों पर अधिक प्रकाश डाला है। यह ग्रन्थकार की विशेषता है।

'द्वीष्ट कर्म' की विधि प्राचीन ग्रन्थों में पृथक् नहीं है, लेकिन महापात निकालने में ज्यौतिषी लोग जो दो इष्ट मानकर क्रिया करते हैं, वही द्वीष्ट कर्म का भेद है। इधर पूज्यवर बापूदेव शास्त्री के समय से लीलावती की टिप्पणी में द्वीष्ट कर्म विधि लिखी गयी है। संकलित गणित का नाम आर्यभट ने चिति रखा है। आर्यभटीय के गणित पाद में योगान्तर श्रेढ़ी की योग विधि है।

प्रमाण :—

इष्टं व्येकं दलितं सपूर्वमुत्तरगुणं समुखमध्यम्।
इष्टगुणितमिष्टधनं त्वथवाद्यन्तं पदार्धहतम्॥

यहाँ इष्ट से पद, इष्टधन से सर्वधन और पूर्व से आदि समझना चाहिये। यही प्रकार लीलावती में भी है। ब्रह्मगुप्त ने चिति का नाम हटा कर संकलित, संकलित-संकलित रखा। आज भी वही व्यवहृत है।

आर्यभट एवं ब्रह्मगुप्त ने गुणोत्तर श्रेढ़ी के गणित नहीं लिखे, किन्तु द्वितीय आर्यभट ने महासिद्धान्त में एवं पृथूदक स्वामी ने अपने ग्रन्थ में इसे लिखा है। लीलावती का आधार स्वामी जी का गणित हो सकता है। क्षेत्रव्यवहार आदि के गणित भी प्राचीन ग्रन्थों में हैं। इसकी सम्पूर्ण विवेचना से लेख विस्तृत होने की आशंका है, अतः यहाँ इतना ही कहना पर्याप्त है कि प्राचीन गणित के विकास में सर्वाधिक श्रेय ग्रन्थकार को है।

एक बार मैं नारदीय महापुराण पढ़ रहा था तो मुझे बड़ा आश्चर्य हुआ जब कि 'लीलावती' के अनुरूप श्लोक मिलने लगे। कुछ श्लोक नीचे दिये जाते हैं :—

योगान्तर के सूत्र :—

'क्रमादुत्क्रमतो वापि योगः कार्योन्तरं तथा'।

गुणनादि के सूत्र :—

हन्याद्गुणेन गुण्यं स्यात्तेनैवोपान्तिमादिकान्।
शुद्धे हरो यद्गुणश्च भाज्यान्त्या तत्फलं मुने॥
समाङ्कतोऽथो वर्गः स्यात्तमेवाहुः कृतिं बुधाः।
अन्त्या तु विषमात् त्यक्त्वा कृतिं मूलं न्यसेत्पृथक्॥
द्विगुणेनामुना भक्तं फलं मूले न्यसेत् क्रमात्।
तत्कृतिं च त्यजेद्विप्र मूलेन विभजेत् पुनः॥
एवं मुहुर्वर्गमूलं जायते च मुनीश्वर।
समत्र्यंकहतिः प्रोक्तो……………………इत्यादि॥

भिन्नपरिकर्माष्टक के सूत्र :—

अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ तु समच्छिदा।
लवालवघ्नाश्च हराहरघ्ना हि सवर्णनम्॥
भागप्रभागे विज्ञेयमित्यादि……… ……।

व्यस्तविधि का सूत्र ठीक-ठीक लीलावती का है। इष्ट कर्म आदि के सूत्र ों भी थोड़ा अन्तर दीख पड़ता है। जिज्ञासुओं के लिये उक्त पुराण का ५ वाँ प्रध्याय अवश्य द्रष्टव्य है।

मेरी समझ से श्री भास्कराचार्य वैष्णव थे और नारदीय पुराण भी ष्णवसम्प्रदाय का है। इस हेतु ग्रन्थकार को उसका आधार लेना सम्भवपरक । उदाहरण के श्लोक पुराण में नहीं हैं।

इस ग्रन्थ की अन्य टीका रहने पर भी मेरी टीका की आवश्यकता इसलिये ई कि जिसमें प्राचीन गणित के साथ नवीन गणित भी संस्कृत के छात्र सीख कें। टीका में ग्रन्थ के क्रमानुसार नवीन गणित के साथ विविध प्रकार के भ्यासार्थ उदाहरण दिये गये हैं। इसमें वर्तमान समय की वस्तु की परिभाषा,

भिन्न, लघुतम, महत्तम, दशमलव, ऐकिक नियम, व्यवहार गणित, समान्तर श्रेढ़ी और क्षेत्रफलानयन पर विशेष रूप से प्रकाश डाला गया है। पूर्व की टीका में उक्त विषयों की कमी थी, इस हेतु संस्कृत के छात्र गणित में पूरे सफल न हो पाते थे। अब एक मात्र इस ग्रन्थ को पढ़ने से प्राचीन या नवीन रीति से सभी तरह के प्रश्नों का उत्तर देने में छात्र सफल होंगे। छात्रों के लिये इसमें प्रत्येक सूत्र का अन्वय, अनुवाद, उपपत्ति और हिन्दी में उदाहरण लिखे गयें हैं।

इस टीका के निर्माण में मैं अपने पूज्य गुरुवर आचार्य श्रीमान् मुरलीधर ठक्कर जी तथा कविवर आचार्य श्री सीताराम झा जी का विशेष आभारी हूँ जिनकी लीलावती-टीका से स्थलविशेष पर मुझे विशेष सहायता मिली है।

यदि इस टीका से छात्रों को कुछ भी लाभ हो, सका तो मेरा श्रम सफल होगा। भ्रम होना मानव का धर्म है, अतः विज्ञजन उसे सूचित करने की कृपा करेंगे।

अन्त में मैं अपने प्रकाशक को धन्यवाद देता हूँ, जिन्होंने प्राचीन संस्कृति, सेवा व्रत को लक्ष्य बनाकर ही ऐसे शुभ कर्मों के अनुष्ठान में तत्पर रहकर अपनी सात्त्विक वृत्ति का परिचय दिया है। आज तक के प्रकाशित ग्रन्थों में इस ग्रन्थ की विशालता का ध्यान रखे विना ही इन्होंने इसके प्रकाशनार्थ धनबाहुल्य व्यय भारवहन की उदारता अपनाई। इस हेतु भगवान शंकर से मेरी प्रार्थना है कि उनका अभ्युदय सर्वथा करें।

चैत्रशुक्ल रामनवमी
वि० सं० २०१८
वैद्यनाथ धाम

निवेदक-
—लषणलाल झा

विषय-सूची

परिशिष्ट

॥ श्रीः ॥

लीलावती

'तत्त्वप्रकाशिका' व्याख्योपेता

मङ्गलाचरणम्—

प्रीतिं भक्तजनस्य यो जनयते विघ्नं विनिघ्नन् स्मृत-
स्तं वृन्दारकवृन्दवन्दितपदं नत्वा मतङ्गाननम् ।
पाटीं सद्गणितस्य वच्मि चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटां
संक्षिप्ताक्षरकोमलामलपदैर्लालित्यलीलावतीम् ॥ १ ॥

टीकाकर्तुर्मङ्गलाचरणम्—

गिरीशं गिरिजाकान्तमर्धनारीश्वरं प्रभुम् ।
हार्दपीठे समासीनं 'वैद्यनाथं' भजे शिवम् ॥
नत्वा गुरुपदाम्भोजं ध्यात्वा हेरम्बमातरम् ।
'तत्त्वप्रकाशिकां' कुर्वे परिशिष्टैरलंकृताम् ॥

यः स्मृतः भक्तजनस्य विघ्नं विनिघ्नन् प्रीतिं जनयते, तं वृन्दारकवृन्दवन्दितपदं मतङ्गाननं नत्वा (अहं भास्कराचार्यः) चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटां संक्षिप्ताक्षरकोमलामलपदैः लालित्यलीलावतीं सद्गणितस्य पाटीं वच्मि ।

स्मरण करने पर जो भक्तजन के विघ्नों को नाशकर प्रीति को देते हैं. देवताओं के समूह से नमस्कृत चरण वाले उन श्रीगणेश जी को प्रणाम कर (मैं भास्कराचार्य) चतुरजन को प्रीति देने वाली, स्पष्ट, थोड़े अक्षर, कोमल

तथा दोषरहित पदों से युक्त एवं माधुर्य से भरी हुई 'लीलावती' नामक पाटी-गणित को कहता हूँ।

अथ परिभाषा

तत्रादौ मुद्राणां परिभाषा—

वराटकानां दशकद्वयं यत् सा काकिणी ताश्च पणश्चतस्रः।
ते षोडश द्रम्म इहावगम्यो द्रम्मैस्तथा षोडशभिश्च निष्कः ॥२॥

वराटकानां दशकद्वयं (२०) यत् सा काकिणी भवति। ताः चतस्रः पणः, ते षोडश पणाः द्रम्मः, तथा इह षोडशभिः द्रम्मैः निष्कः अवगम्यः ॥ २ ॥

बीस कौड़ी की एक काकिणी और चार काकिणी का एक पण एवं सोलह पणों का एक द्रम्म होता है। इस शास्त्र में सोलह द्रम्मों का एक निष्क समझना चाहिए। प्राचीन समयमुद्राओं का मान है ॥ २ ॥

भारपरिमाणम्—

तुल्या यवाभ्यां कथिताऽत्र गुञ्जा वल्लस्त्रिगुञ्जो धरणं च तेऽष्टौ।
गद्याणकस्तद्द्वयमिन्द्रतुल्यैर्वल्लैस्तथैको धटकः प्रदिष्टः ॥३॥

अत्र यवाभ्यां तुल्या गुञ्जा कथिता, त्रिगुञ्जः वल्लः, तेऽष्टौ धरणं, तद्द्वयं (धरणद्वयं) गद्याणकः, तथा इन्द्रतुल्यैः वल्लैः एकः धटकः च प्रदिष्टः ॥ ३ ॥

दो यवों के समान एक गुञ्जा, तीन गुञ्जा का एक वल्ल, आठ वल्लों का एक धरण, दो धरण का एक गद्याणक और चौदह वल्ल का एक धटक होता है ॥३॥

माषादिमानम्—

दशार्धगुञ्जं प्रवदन्ति माषं माषाह्वयैः षोडशभिश्च कर्षम्।
कर्षैश्चतुर्भिश्च पलं तुलाज्ञाः कर्षं सुवर्णस्य सुवर्णसंज्ञम् ॥ ४ ॥

तुलाज्ञाः दशार्धगुञ्जं माषं, षोडशभिः माषाह्वयैः कर्षं, चतुर्भिः कर्षैश्च पलं प्रवदन्ति। सुवर्णस्य कर्षं सुवर्णसंज्ञं भवतीति ॥ ४ ॥

तौलना जानने वाले विशेषज्ञ पाँच गुञ्जा का एक माष, सोलह माष का एक कर्ष और चार कर्ष का एक पल कहते हैं। सोने का कर्ष सुवर्ण संज्ञक है अर्थात् १ कर्ष = १ सुवर्ण का है ॥ ४ ॥

अङ्गुलादिमानम्—

ावोदरैरङ्गुलमष्टसंख्यैर्हस्तोऽङ्गुलैः षड्गुणितैश्चतुर्भिः।
स्तैश्चतुर्भिर्भवतीह दण्डः क्रोशः सहस्रद्वितयेन तेषाम् ॥ ५ ॥

इह अष्टसंख्यैः यवोदरैः अंगुलं, षड्गुणितैश्चतुर्भिरङ्गुलैः हस्तः, चतुर्भिर्हस्तैः ः, तेषां सहस्रद्वितयेन च क्रोशः भवति ॥ ५ ॥

आठ यवोदर का एक अंगुल, चौबीस अंगुल का एक हाथ, चार हाथ का दण्ड और दो हजार दण्ड का एक कोश होता है ॥ ५ ॥

योजनादिमानम्—

स्याद्योजनं क्रोशचतुष्टयेन तथा कराणां दशकेन वंशः।
नेवर्तनं विंशतिवंशसंख्यैः क्षेत्रं चतुर्भिश्च भुजैर्निबद्धम् ॥ ६ ॥

क्रोशचतुष्टयेन योजनं, तथा दशकेन कराणां वंशः, विंशतिवंशसंख्यैः चतुर्भिः ः निबद्धं क्षेत्रं च निवर्तनं स्यात् ॥ ६ ॥

चार कोश का एक योजन, दश हाथ का एक वंश और बीस वंश के तुल्य भुजाओं से निबद्ध (वर्गाकार) क्षेत्र एक निवर्तन (बीघा) होता है ॥६॥

घनहस्तादिमानम्—

हस्तोन्मितैर्विस्तृतिदैर्घ्यपिण्डैर्यद् द्वादशास्रं घनहस्तसंज्ञम्।
धान्यादिके यद् घनहस्तमानं शास्त्रोदिता मागधखारिका सा॥७॥

हस्तोन्मितैः विस्तृतिदैर्घ्यपिण्डैः यत् द्वादशास्रं (तत्) घनहस्तसंज्ञम् वति)। धान्यादिके यद् घनहस्तमानं सा शास्त्रोदिता मागधखारिका(भवति)॥

एक हाथ चौड़ा, लम्बा और मोटा बारह कोण वाला गढ़ा घनहस्त संज्ञक धान्यादिके तौलने में जो घनहस्त की तौल है वह मगध देश में व्यवहृत शोक खारी है.॥ ७ ॥

द्रोणादिमानम्—

द्रोणस्तु खार्याः खलु षोडशांशः स्यादाढको द्रोणचतुर्थभागः।
प्रस्थश्चतुर्थांश इहाढकस्य प्रस्थांघ्रिराद्यैः कुडवः प्रदिष्टः ॥८॥

इह खलु खार्याः षोडशांशः द्रोणः, द्रोणचतुर्थभागः आढकः स्यात्। आढकस्य चतुर्थांशः प्रस्थः, प्रस्थांघ्रिः आद्यैः कुडवः प्रदिष्टः॥ ८॥

यहाँ खारी के सोलहवें भाग को द्रोण, द्रोण के चौथे भाग को आढक, आढक के चौथे भाग को प्रस्थ और प्रस्थ के चौथे भाग को प्राचीनाचार्यों ने कुडव कहा है॥ ८

यवनप्रचारितमानम्—

पादोनगद्याणकतुल्यटङ्कैर्द्विसप्ततुल्यैः कथितोऽत्र सेरः।
मणाभिधानं खयुगैश्च सेरैर्धान्यादितौल्येषु तुरुष्कसंज्ञा॥ ९।

अत्र द्विसप्ततुल्यैः पादोनगद्याणकतुल्यटङ्कैः सेरः कथितः। खयुगैः च सेरैः मणाभिधानं (कथितम्)। धान्यादितौल्येषु (एषा) तुरुष्कसंज्ञा॥ ९॥

बहत्तर पौन $\frac{3}{4}$ गद्याणक तुल्य टंक का एक सेर (अर्थात् ३६ रत्ती (गुञ्जा) का १ टंक और ७२ टंक का १ सेर) और चालीस सेर का एक मन होता है यह अन्न आदि तौलने में यवनों की बनाई संज्ञा है॥ ९॥

आलमगीरशाहप्रचारितमानम्—

द्व्यङ्केन्दु-संख्यैर्घटकैश्च सेरस्तैः पञ्चभिः स्याद्धटिका च ताभिः।
मणोऽष्टभि'स्त्वालमगीरशाह'कृताऽत्र संज्ञा निजराज्यपूर्षु॥१०।

द्व्यङ्केन्दुसंख्यैः घटकैः सेरः, तैः पञ्चभिः धटिका च स्यात्। ताभिः अष्टभिः मणः (स्यात्)। अत्र तु निजराज्यपूर्षु आलमगीरशाहकृता संज्ञा (कथिता)॥१०

१९२ धटक का एक सेर, पाँच सेर का एक धटिका और आठ धटिका (पसेरी) का एक मन होता है। यहाँ यह अपने राज्य के नगरों में आलमगीर शाह से चलायी हुई संज्ञा कही गयी है। मध्यदेश में अभी भी यह मान चलता है॥ १०॥

कालादिपरिभाषा—

शेषाः कालादिपरिभाषा लोकतः प्रसिद्धा ज्ञेयाः॥

शेष काल आदि की परिभाषायें लोक में प्रसिद्ध हैं अतः उन्हें लोकव्यवहार से समझना चाहिए। जैसे ६ प्राण का १ पल, ६० पल की १ घटी, २ घटी का १ मुहूर्त, ३$\frac{3}{4}$ मुहूर्त का १ प्रहर, ८ प्रहर का १ दिन, ६० घटी का १ अहोरात्र, १५ दिन का १ पक्ष, २ पक्ष का १ मास, २ मास का १ ऋतु, ६ ऋ

१ वर्ष। माघ से ६ महीना = १ सौम्यायन का। श्रावण से ६ महीना = याम्यायन का। नवीन मत से-६० सेकेण्ड = १ मिनट, ६० मिनट=१ घंटा। घण्टा = १ दिन। ७ दिन = १ सप्ताह। ३६५ दिन = १ वर्ष। ३६६ दिन= द्वीपवर्ष। १०० वर्ष = १ शताब्दी।

विशेषपरिभाषाविवरणम्

भारतीय मुद्रा की परिभाषा—

२० रचौड़ी	=	१ फौड़ी,	२० फौड़ी	=	१ चौड़ी
२० चौड़ी	=	१ कौड़ी,	२० कौड़ी	=	१ दमड़ी
२ दमड़ी	=	१ छदाम,	२ छदाम	=	१ अधेला
२ अधेला	=	३ पाई,	३ पाई	=	१ पैसा
४ पैसे	=	१ आना,	१६ आने	=	१ रुपया

तौल की परिभाषा—

८ खसखस	=	१ चावल,	८ चावल	=	१ रत्ती
८ रत्ती	=	१ माशा,	१२ माशा	=	१ तोला
५ तोला	=	१ छटाक,	४ छटाक	=	१ पाव
४ पाव	=	१ सेर,	५ सेर	=	१ पसेरी
८ पसेरी	=	१ मन			

देशी तौल का परिमाण—

२० फनई	=	१ रनई,	२० रनई	=	१ कनई
२० कनई	=	१ छटाक,	१६ छटाक	=	१ सेर
४० सेर	=	१ मन			

वम्बई का स्थानीय तौल—

४ धान	=	१ रिक्तक,	८ रिक्तक	=	१ माशा
४ माशे	=	१ टंक,	७२ टंक	=	१ सेर
४० सेर	=	१ मन,	२० मन	=	१ कांडी
१ मन	=	२८ पौण्ड			

१९५७ के १ अप्रैल से प्रचलित भारतीय मुद्रा—

१०० नये पैसे = १) रु०, ५० नये पैसे = ||), २५ नये पैसे = |), १० नये पैसे = १/१० रु०, ५ नये पैसे = १/२० रु०, २ नये पैसे = १/५० रु०, १ नया पैसा = १/१०० रु०।

पुराना पैसा	नया पैसा	पुराना पैसा	नया पैसा	पुराना पैसा	नया पैसा	पुराना पैसा	नया पैसा
)।	२	।)।	२७	॥)।	५२	॥।)।	७७
)॥	३	।)॥	२८	॥)॥	५३	॥।)॥	७८
)॥।	५	।)॥।	३०	॥)॥।	५५	॥।)॥।	८०
-)	६	।-)	३१	॥-)	५६	॥।-)	८१
-)।	८	।-)।	३३	॥-)।	५८	॥।-)।	८३
-)॥	९	।-)॥	३४	॥-)॥	५९	॥।-)॥	८४
-)॥।	११	।-)॥।	३६	॥-)॥।	६१	॥।-)॥।	८६
=)	१२	।=)	३७	॥=)	६२	॥।=)	८७
=)।	१४	।=)।	३९	॥=)।	६४	॥।=)।	८९
=)॥	१६	।=)॥	४१	॥=)॥	६६	॥।=)॥	९१
=)॥।	१७	।=)॥।	४२	॥=)॥।	६७	॥।=)॥।	९२
≡)	१९	।≡)	४४	॥≡)	६९	॥।≡)	९४
≡)।	२०	।≡)।	४५	॥≡)।	७०	॥।≡)।	९५
≡)॥	२२	।≡)॥	४७	॥≡)॥	७२	॥।≡)॥	९७
≡)॥।	२३	।≡)॥।	४८	॥≡)॥।	७३	॥।≡)॥।	९८
।)	२५	॥)	५०	॥।)	७५	१)	१००

मद्रास की तौल—

३ तोले	=	१ पलम्	८ पलम्	=	१ सेर
५ सेर	=	४० पलम् = १ विसम्,	८ विस	=	१ मन
२० मन	=	१ कांडी	मद्रासी, १ मन	=	२५ पौण्ड

वस्तुओं के गणना का परिमाण—

१२ वस्तु = १ दर्जन, १२ दर्जन = १ ग्रोस
५ वस्तु = १ गाही, २० वस्तु = १ कोड़ी
२४ ताव कागज = १ जिस्ता, २० जिस्ता = १ रीम
१० रीम = १ गड्डा, २०० पान = १ ढोकी

लम्बाई माप की परिभाषा—

३ यव = १ अंगुल, ३ अंगुल = १ गिरह, ४ गिरह = १ बित्ता
८ गिरह = १ हाथ, १६ गिरह = १ गज
५ हाथ १ बित्ता = १ कम्मा (पूर्णियाँ) ४ हाथ = १ कम्मा (बंगाल)
६½ वा ७½ हाथ = १ कम्मा (दरभंगा) ९ हाथ (मुआसहित) = १ कम्मा (नेपाल)
२० कम्मा = १ जरीब

खेतों के क्षेत्रफल का देशी परिमाण—

२० फुरकी = १ धुरकी। २० धुरकी = १ धूर। १६ कनई = १ छटाक।
४ छटाक = १ पौवा। ४ पौवा = १ धूर। २० धूर = १ कट्ठा।
२० कट्ठा = १ बीघा। २० लग्गी = १ रस्सी।
रस्सी × रस्सी = बीघा। रस्सी × लग्गी = कट्ठा। ल० × ल० = धूर।
ल० × पौवा = पौवा। ल० × छटाक = छटाक। छ० × छ० = कनई।
र० × पौ० = ५ गुणाधूर। र० × छ० = सवा गुणाधूर।

डाक्टरी नाप तौल—

२० ग्रेन = १ स्क्रूपल, ३ स्क्रूपल = १ ड्राम
८ ड्राम = १ औंस, ६० बून्द = १ ड्राम
८ ड्राम = १ औंस, २० औंस = १ पाइन्ट
८ पाइन्ट = १ गैलन

दर्जी की माप—

२¼ इञ्च = १ गिरह (खुन्टी), ४ गिरह = १ क्वार्टर (बालिश्त)
४ क्वार्टर = १ गज, ५ क्वार्टर = १ एल

अंग्रेजी मुद्रा की परिभाषा—

४ फार्दिङ्ग = १ पेनी, १२ पेन्स = १ शिलिङ्ग

२० शिलिंग = १ पौण्ड, २१ शिलिंग = १ गिन्नी

अं० तौल की परिभाषा

२४ ग्रेन	=	१ पेनीवेट,	२० पेनीवेट	=	१ औन्स
१६ औन्स	=	१ पौण्ड,	२८ पौण्ड	=	१ कार्टर
४ कार्टर	=	१ हण्डर,	२० हण्डर	=	१ टन
१ टन	=	२७ मन ८ सेर १४$\frac{२}{६}$ छटांक।			

अं० लम्बाई—

१२ इञ्च	=	१ फूट,	३ फूट	=	१ गज
५$\frac{१}{२}$ गज	=	१ पोल,	४० पोल	=	१ फर्लांग
८ फर्लांग	=	१ मील,	३ मील	=	१ लीग
१८ इञ्च	=	१ हाथ,	२ हाथ	=	१ गज

भूमि की अं० माप—

१४४ वर्ग इञ्च	=	१ वर्ग फूट,	९ व० फीट	=	१ वर्ग गज
३०$\frac{१}{४}$ वर्ग गज	=	१ व० पोल,	४० व० पो०	=	१ रूड
४८४० वर्ग गज	=	१ एकड़,	६४० ए०	=	१ व० मील
४८४ वर्ग गज	=	१ वर्गजरीव,	१७२८ घन इञ्च	=	१ घ० फूट
२७ घन फीट	=	१ घन गज			

योगान्तरादिका संकेतित चिह्न—

योग	=	+	=	Addition	=	ऐडिशन	=	प्लस
अन्तर	=	−	=	Substraction	=	सब्स्ट्रैकशन	=	माइनस
गुणा	=	×	=	Multiplication	=	मल्टीप्लिकेशन	=	इनटू
भाग	=	÷	=	Divide	=	डिव्हाइड	=	डिव्हाइड
वर्ग	=	२	=	Square	=	स्कायर	=	स्कायर
वर्गमूल	=	$\sqrt{}$	=	Square-root	=	स्कायर रूट	=	स्कायर रूट
घन	=	३	=	Cube	=	क्यूब	=	क्यूब
घनमूल	=	$\sqrt[3]{}$	=	Cube root	=	क्यूब रूट	=	क्यूब रूट
दशमलव	=		=	Decimal	=	डेसिमल	=	डेसिमल

इति परिभाषा।

अथाभिन्नपरिकर्माष्टकम्

मङ्गलाचरणम्—

लीलागललुलल्लोलकालव्यालविलासिने ।
गणेशाय नमो नीलकमलामलकान्तये ॥ १ ॥

लीलागललुलल्लोलकालव्यालविलासिने (लीलया गले लुलन्तो ये लोलाश्चञ्चलाः कालव्यालास्तेषां विलासो विद्यते यस्मिन् तस्मै) (एवं) नीलकमलामलकान्तये गणेशाय नमोऽस्तु ॥ १ ॥

लीला से गले में लिपटे हुए चञ्चल सर्प से शोभित और नील कमल के समान निर्मल कान्तिवाले गणेशजी को नमस्कार है ॥ १ ॥

संख्यास्थानानि—

एकदशशतसहस्रायुतलक्षप्रयुतकोटयः क्रमशः ।
अर्बुदमब्जं खर्वनिखर्वमहापद्मशङ्कवस्तस्मात् ॥ २ ॥
जलधिश्चान्त्यं मध्यं परार्धमिति दशगुणोत्तराः संज्ञाः ।
संख्यायाः स्थानानां व्यवहारार्थं कृताः पूर्वैः ॥ ३ ॥

एक (१), दश (१०), शत (१००), सहस्र (१०००), अयुत (१००००), लक्ष (१०००००), प्रयुत (१००००००), कोटि (१०००००००), अर्बुद (१००००००००), अब्ज (१०००००००००), खर्व (१००००००००००), निखर्व (१००००००००००००), महापद्म (१००००००००००००), शङ्कु (१००००००००००००००), जलधि (१०००००००००००००००), अन्त्य (१००००००००००००००००), मध्य (१०००००००००००००००००) और परार्ध (१००००००००००००००००००) ये संज्ञा उत्तरोत्तर दशगुणित हैं। इन स्थानों की संख्या व्यवहार के लिए पूर्वाचार्यों ने की है ।

उपपत्तिः—अथ गणनायामङ्कस्यैव प्राधान्यत्वादिह जगति अङ्कज्ञानं विना न कोऽपि जनः किमपि कार्यं कर्तुं शक्यते, अत एवाङ्कमेव संसारस्य बीजमिति कथने न काऽपि विप्रतिपत्तिः । तत्राङ्कशास्त्रे या गणनारीतिः दृश्यते सा वेदेऽप्यस्ति । यथा यजुर्वेदसंहितायाः सप्तदशाध्याये 'दश दश च शतं शतं च सहस्रं च सहस्रं

चायुतं चायुतं नियुतं च नियुतं च प्रयुतं चार्बुदं च समुद्रश्च मध्यं चान्तश्च परार्धश्चैता मे अग्न इष्टका धेनवः सन्त्वमुत्रामुष्मिन् लोके'। अत्र केवलं कोटि-खर्व-निखर्व-महापद्म-शंकुसंज्ञानां संख्यास्थानानामुल्लेखो नास्त्यन्यत्सर्वं समान-मेवातोऽनुमीयते यथा यत् ग्रन्थेऽस्मिन् या गणनारीतिस्तस्या आधारो वेद एव भवेत् नान्यः।

अत्र नवीनाः वदन्ति यत्—पुरा साधनाभावात् सर्वे जनाः स्वहस्तयोर्दशा-ङ्गुलिभिः गणनाकार्यं कुर्वन्ति स्म, तेन दशस्थाने दशकं, दशदशकस्थाने शतकं, दशशतकस्थाने सहस्रमित्यादि संज्ञाः कृताः। व्यवहारे परार्धपर्यन्तस्यैवाङ्कस्य प्रयोजनं भवत्यतः परार्धान्तमेवोक्तमिति ॥ २–३ ॥

अथ सङ्कलितव्यवकलितयोः करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

कार्यः क्रमादुत्क्रमतोऽथ वाऽङ्कयोगो यथास्थानकमन्तरं वा।

क्रमात् अथवा उत्क्रमतः यथास्थानकं (यथास्थानस्थितानामङ्कानामर्थात् एकस्थानीयाङ्कानामधः एकस्थानीयाङ्कान् दशमस्थानीयाङ्कानामधः दशमस्थानी-याङ्कान् संस्थाप्य तत्तत्समानस्थानीयाङ्कैः तत्तत्समानस्थानीयाङ्कानां) अङ्कयोगः कार्यः वा अन्तरं कार्यम् ॥

क्रम से वा उत्क्रम (उलटी रीति) से यथा स्थानस्थितअङ्कों का अर्थात् एकस्थानीय अङ्कों के नीचे एकस्थानीय अङ्कों को, एवं दशस्थानीय अङ्कों के नीचे दशस्थानीय अङ्कों को तथा शतस्थानीय अङ्कों के नीचे शतस्थानीय अङ्कों को रखकर उन तुल्यस्थानीय अङ्कों का योग वा अन्तर करना चाहिए।

उपपत्तिः—समानजात्योरेव योगान्तरं भवतीति नियमादेकादिस्थानीयाङ्के-ष्वेकादिस्थानीयाङ्कस्य योगो वियोगो वा समुचितमत एव यथास्थानस्थित-मित्युक्तं भास्करेण।

अत्रोद्देशकः (प्रश्नः)—

अये बाले लीलावति मतिमति ब्रूहि सहितान्
द्विपञ्चद्वात्रिंशत्त्रिनवतिशताष्टादश दश।
शतोपेतानेतानयुतवियुतांश्चापि वद मे
यदि व्यक्ते युक्तिव्यवकलनमार्गेऽसि कुशला ॥ १ ॥

द्वि (२) पञ्च (५) द्वात्रिंशत् (३२) त्रिनवतिशत् (१९३) अष्टादश (१८) दश (१०) शत (१००) अंकानां योगफलं किं स्यात्तथा एतान् अंकान् अयुतात् (१००००) विशोधनेनान्तरफलं किं भवेदिति ब्रूहि ।

हे बाले, बुद्धिमति, लीलावति ! यदि पाटीगणित के योग और घटाव को तुम अच्छी तरह जानती हो, तो २, ५, ३२, १९३, १८, १०, इनको १०० में जोड़कर योगफल कहो और इस योगफल को १०००० में घटाने पर शेष क्या होगा वह भी बताओ ॥

न्यासः—२ । ५ । ३२ । १९३ । १८ । १० । १०० संयोजनाज्जातम् ३६० । अयुतात्-(१००००) शोधिते जातम् ९६४० ।

विशेष—यहाँ क्रम और उत्क्रम रीति से योग और अन्तर करने की विधि बतायी गयी है । जैसे ३२५ में १२५ को जोड़ना है तो पहले ३२५ के नीचे इकाई के स्थान में ५ को और दहाँई की जगह २ को फिर सैकड़े की जगह १ को लिखा तो $\frac{\text{३२५}}{\text{१२५}}$ ऐसा हुआ । अब पाँच में पाँच को जोड़ा तो दश हुआ, दश का रक्खा शून्य हाथ में रहा १, फिर दहाई वाले अङ्कों को जोड़ा तो ४ हुआ इसमें हाथ वाला अङ्क १ जोड़ा तो ५ हुआ, इसको शून्य की बाँयी तरफ में रख दिया । बाद में सैकड़े स्थान वाले अङ्कों को जोड़ा तो ४ हुआ, इसको ५ की बाँयी तरफ रक्खा तो योग के सभी अङ्क ४५० हुए । यही क्रमरीति से योग फल हुआ । क्रमरीति में पहले दाहिनी तरफ से अङ्कों का योग प्रारम्भ होता है और उत्क्रम में बाँयी तरफ से ।

उत्क्रमरीति से योग करने के लिए ३२५ के नीचे १२५ को रक्खा । यहाँ बाँयीं तरफ में ३ के नीचे १ है अतः दोनों का योगफल ४ को अलग लिख दिया । इसके बाद दो में दो को जोड़ने से ४ हुआ, उसको पहले वाला ४ की दाहिनी बगल में रक्खा । अब इकाई वाले अङ्कों का योग किया तो १० हुआ, दश का शून्य पहले ४ की दाहिनी तरफ रख दिआ और १ को शून्य की बाँयीं तरफ वाले ४ के ऊपर लिख दिया तो ऐसा हुआ ४$\overset{\text{१}}{\text{४}}$० । इनका योग किया तो—४५० पहले योग फल के समान हुआ ।

जैसे क्रमरीति से इन दोनों का योग फल = $\begin{array}{r}\text{३२५}\\ \text{१२५}\\ \hline \text{४५०}\end{array}$

उत्क्रमरीति से इन दोनों का योग-फल—$\frac{\text{३२५}}{\text{१२५}}$ । $\frac{\text{४}\overset{\text{१}}{\text{४}}\text{०}}{\text{४५०}}$ ।

क्रम रीति से अन्तर करने के लिए ३२५ के नीचे १२५ को रख दिया। बाद दाहिनी तरफ के ऊपर वाले ५ में नीचे का ५ घटाया तो बचा शून्य, उसको खा। फिर २ में २ घटाया तो शेष शून्य को पहले के शून्य से बाँयी तरफ खा। अन्त में ३ में १ घटाया तो २ शेष रहा, इसको लिखा हुआ शून्य की यी तरफ लिख दिया तो ऐसा हुआ—२००। यही उन दोनों अङ्कों का न्तर हुआ।

उत्क्रम रीति से घटाना हो तो घटने वाले अङ्कों को ऊपर लिखो और जिसमें गा उनको नीचे लिख कर बाँयी ओर से घटाना प्रारम्भ करो। जैसे ३२५ में १५ घटाना है तो ३२५ के ऊपर १३५ को लिखा। अब नीचे की बाँयी बगल ३ है अतः ३ में ऊपर के १ को घटाया तो शेष २ बचा, लेकिन आगे २ में नहीं घटेगा अतः शेष २ को लिखा। १ हाथ में १ दहाँई लेकर २ में जोड़ा १२ हुआ, इसमें ऊपर वाले ३ को घटाया तो शेष ९ रहा। इसको पहले ष की दाहिनी तरफ लिख दिया क्योंकि आगे ५ में ५ घट जायेगा। अब ५ में घटाया तो शून्य शेष रहा। इसको लिखित शून्य से दाहिनी तरफ लिख या तो अन्तर १९० हुआ।

इति सङ्कलितव्यवकलिते।

अथ गुणने करणसूत्रं सार्धवृत्तद्वयम्—

ण्यान्त्यमङ्कं गुणकेन हन्यादुत्सारितेनैवमुपान्तिमादीन्॥ ४॥

गुण्यान्त्यमङ्कं गुणकेन हन्यात्। एवं उत्सारितेन (अग्रप्रचालितेन) उपान्तिमादीन् हन्यात्॥ ४॥

जिसको गुणा किया जाय उसे गुण्य और जिससे गुणा किया जाय उसको णक कहते हैं। गुण्य के अन्तिम अङ्क को गुणक से गुणा करे, फिर उसी गुणक आगे बढ़ा कर उपान्तिमादि (क्रम से अगले-अगले अङ्कों को) गुणा करे।

विशेष—यहाँ केवल सूत्रार्थ से गुणा करने की विधि स्पष्ट नहीं होती अतः दाहरण के साथ दिखाता हूँ। जैसे १३५ को १२ से गुणा करना है तो गुण्य ा अन्तिम अङ्क १ को १२ से गुणा किया तो फल १२ हुआ इसको १ के पर लिख कर १ को मार कर गुणक को ३ के सामने रक्खा। अब ३ को २ से गुणा किया तो फल ३६ हुआ, इसमें से ६ को ३ के ऊपर लिखा और

३ को उसकी बाँयी तरफ २ के ऊपर लिख दिया। बाद में फिर १२ को ५ के सामने रक्खा और गुणा किया तो ६० हुआ, इसमें शून्य को ५ के ऊपर दिया और ६ को उसकी बाँयी तरफ ३ के ऊपर लिखा। आगे गुण्य में अङ्क नहीं है इस हेतु गुणनक्रिया समाप्त हो गयी। अङ्क रहने पर इसी तरह आगे भी क्रिया करनी चाहिए। बाद में सबों को जोड़ने पर गुणनफल होता है। यह क्रिया भूमि या सिलेट प्रभृति पर ठीक से होती है।

जैसे—गुण्य = १३५	३६		३६
गुणक = १२	१२६०	=	१२६०
	१,३,५		१६२० = गुणन फल।
	१२		

यदि इकाई वाले अङ्क को गुण्य का अन्तिम अङ्क मान लिया जाय तो प्रचलित गुणनक्रिया के तुल्य ही इसकी विधि होगी। जैसे १३५ को १२ से गुणा करना है तो १२ से पहले ५ को गुणा किया तो ६० हुआ, इसमें शून्य को नीचे लिखा, हाथ में रहा ६, फिर १२ से ३ को गुणा किया तो ३६ हुआ, इसमें हाथ वाला ६ मिला दिया तो ४२ हुआ, ४२ का २ नीचे लिखा, हाथ में चार रहा। अब १२ से १ को गुणा किया तो १२ हुआ, इसमें हाथ वाला ४ जोड़ा तो १६ हुआ। इसको पहले वाले २ की बाँयी बगल में लिख दिया तो १६२० हुआ। यही उन दोनों अङ्कों का गुणनफल हुआ।

द्वितीयः प्रकारः—

गुण्यस्त्वधोऽधो गुणखण्डतुल्यस्तैः खण्डकैः संगुणितो युतो वा।

वा गुणखण्डतुल्यः गुण्यः अधः अधः तैः खण्डकैः संगुणितः युतश्च कार्यस्तदा गुणनफलं भवतीति।

इच्छानुसार गुणक का खण्ड करके खण्डतुल्य स्थानों में क्रम से नीचे-नीचे गुण्य को लिख कर उनको प्रत्येक गुणक खण्ड से गुणा कर जोड़ने से गुणनफल होता है। जैसे गुण्य = १३५। गुणक = १२, यहाँ गुणक को दो खण्ड किये ८।४ अब गुण्य को दो जगह लिख कर प्रत्येक खण्ड से गुणा किया तो—

१३५ × ८ = १०८०
१३५ × ४ = ५४० । इन दोनों का योग किया तो—१०८० + ५४०=१६२०= गुणन फल।

हे बाले बालकुरङ्गलोलनयने लीलावति ! कल्याणिनि ! यदि रूपस्थान-विभागखण्डगुणने कल्याऽसि, तर्हि पञ्चत्र्येक (१३५) मिताऽङ्काः दिवाकर-गुणाः कति स्युः, इति प्रोच्यताम् । अथ च ते गुणिताः अङ्काः तेन गुणेन छिन्नाः (भक्ताः सन्तः) जाताः कति स्युः । इति भागहार प्रश्नः ।

हे बाले बालकुरङ्गलोलनयने कल्याणिनि लीलावति ! यदि रूप, स्थानविभाग और खण्ड गुणन की रीति से गुणा करने में शक्तिमति हो, तो १३५ को १२ से गुणा करने पर क्या होगा सो कहो और गुणनफल को उसी गुणक से भाग देने पर लब्धि क्या होगी वह भी बताओ ॥

न्यासः । गुण्यः १३५ । गुणकः १२ ।

गुण्यान्त्यमङ्कं गुणकेन हन्यादिति कृते जातम् १६२० ।

अथवा गुणरूपविभागे खण्डे कृते ८ । ४ । आभ्यां पृथग् गुण्ये गुणिते युते च जातम् १६२० ।

अथवा गुणकस्त्रिभिर्भक्तो लब्धम् ४ । एभिस्त्रिभिश्च गुण्ये गुणिते जातं तदेव १६२० ।

अथवा स्थानविभागे खण्डे १ । २ । आभ्यां पृथग्गुण्ये गुणिते यथा-स्थानयुते च जातं तदेव १६२० ।

अथवा द्व्यूनेन १० । गुणेन, द्वाभ्यां च । २ पृथग्गुण्ये गुणिते युते च जातं तदेव १६२० ।

अथवाऽष्टयुतेन गुणेन २० गुण्ये गुणितेऽष्ट-८ गुणितगुण्यहीने च जातं तदेव १६२० ।

इति गुणनप्रकारः ।

सूत्रार्थ में ही इन सबों का गणित दिखाया गया है ।

गुणनपरिशिष्ट—

(१) यदि किसी संख्या को ५, $५^२$, $५^३$, $५^४$······से गुणा करना हो, तो उस संख्या पर क्रम से १, २, ३ आदि शून्य रख कर उन्हें २, $२^२$, $२^३$··· आदि संख्या से भाग दें तो इष्ट गुणनफल होंगे ।

जैसे ९३२ को $५^२$ से गुणा करना है तो ९३२ पर दो शून्य रखकर ९३२००, दो का वर्ग ४ से भाग दिया तो २३३०० हुआ, यही उन दोनों अङ्कों का गुणनफल हुआ ।

(२) किसी संख्या को ११ से १९ तक की किसी संख्या से गुणा करना हो तो—गुणक के प्रत्येक अङ्क को गुणक की इकाई वाले अङ्क से साधारण रीति से गुणा करते चलो, परन्तु गुणा करके हाथ में आये अङ्क जोड़ने के बाद गुण्य में उस अङ्क के पहले आने वाला अङ्क भी जोड़ कर लिखने से गुणनफल होगा।

जैसे—२५ को १४ से गुणा करना है अतः ४ से ५ को गुणा किया तो २० हुआ, इसका शून्य, हाथ में २, फिर २ को गुणा किया तो ८ इसमें हाथ का २ जोड़ा, १० हुआ, इसमें पहले वाला गुण्य का अङ्क ५ जोड़ा तो १५ हुआ, इसका ५ लिखा हाथ में १, अब गुण्य में अङ्क नहीं है। अतः हाथ वाले १ को गुण्य के अन्तिम अङ्क में जोड़ कर लिख दिया तो कुल ३५० हुये। इसी तरह सर्वत्र जानना चाहिए।

गुणनफल जाँचने की रीति—

(३) यदि गुणनफल में गुण्य से भाग देने पर लब्धि गुणक के तुल्य आ जाय, तो गुणनफल शुद्ध समझना चाहिए।

अथ भागहारे करणसूत्रं वृत्तम्

भाज्याद्धरः शुध्यति यद्गुणः स्यादन्त्यात् फलं तत् खलु भागहारे।
समेन केनाप्यपवर्त्य हारभाज्यौ भजेद्वा सति सम्भवे तु ॥ ७ ॥

अन्त्याद् भाज्यात् हरः यद्गुणः शुध्यति तत् खलु भागहारे फलं स्यात्। वा सम्भवे सति हारभाज्यौ केनापि समेन (अङ्केन) अपवर्त्य भजेत् तदा फलं स्यात् ॥ ७ ॥

भाज्य के अन्तिम अङ्क से लेकर हर जितना गुणा घट जाय वह भाग हरण में फल (लब्धि) होता है। अथवा यदि सम्भव हो तो किसी एक ही अङ्क से हर और भाज्य को अपवर्तन देकर फिर हर की लब्धि से भाज्य की लब्धि को भाग देने पर फल होता है ॥ ७ ॥

उपपत्तिः—भक्तुं योग्यो भाज्यो येन विभज्यते स भाजकस्तथा भजनेन यत्फलं सा लब्धिः। भाज्याद् यद्गुणो भाजकः शुध्यति सा गुणसंख्या एव

लब्धिर्भवतीति स्फुटम् । अथवा समेनाङ्केनापवर्तिताभ्यामपि भाज्य हराभ्यां लब्धौ विकाराभावात्तयोक्रमाचार्येणेति ॥ ७ ॥

अत्र पूर्वोदाहरणे गुणिताङ्कानां स्वगुणच्छेदान । भागहारार्थं

न्यासः । भाज्यः १६२० । भाजकः १२ ।

भजनाल्लब्धो गुण्यः १३५ ।

अथवा भाज्यहारौ त्रिभिरपवर्त्तितौ $\frac{५४०}{४}$ चतुर्भिर्वा $\frac{४०५}{३}$

इति भागहारः ।

उदाहरण—भाज्य १६२०, भाजक १२, यहाँ भाज्य में अन्तिम अङ्क १ है, अतः १२ नहीं घटा। इसलिये अन्तिम अङ्क १६ मान कर उसमें १२ एक बार घटाकर शेष ४ पर २ उतारा तो ४२ हुआ। लब्धि की जगह १ लिखा। अब ४२ में १२ तीन बार घटता है अतः शेष ६ बचा, उस पर शून्य उतारा तो ६० हुआ। लब्धि १ की दाहिनी बगल ३ लिखा। ६० में फिर १२ पांच बार घटा शेष शून्य रहा और लब्धि ५ हुई। भाज्य में अब अङ्क नहीं है इस हेतु क्रिया समाप्त हो गयी। लब्धि १३५ हुई।

दूसरा प्रकार—भाज्य १६२०। भाजक १२। यहाँ भाज्य और भाजक दोनों में ४ से अपवर्तन दिया, तो भाज्य की लब्धि ४०५, और भाजक की लब्धि ३ हुई। अब ४०५ को ३ से भाग देने पर लब्धि १३५ हुई। यह पहली रीति से आई हुई लब्धि के समान ही है ॥ ॥ ७ ॥

भागहार परिशिष्ट—

(१) भागहार में जो भाज्य, भाजक से पूरा पूरा बँट जाय उसे—पूर्ण भाज्य, और शेष वाले को अपूर्ण भाज्य कहते हैं।

खण्ड भागहार—

(२) खण्डभागहार में भाज्य को, भाजक के ऐसे टुकड़ों से, जिनका गुणनफल भाजक के बराबर हो, लगातार भाग देने से भागफल होता है।

यथा—भाज्य १६२० भाजक १२। यहाँ १२ = २ × २ × ३। अतः—

१६२० ÷ २ = ८१०। ८१० ÷ २ = ४०५। ४०५ ÷ ३ = १३५ = उत्तर।

अपूर्ण भाज्य का उदाहरण—भाज्य ११४३ भाजक ४५। परन्तु ४५ = ५ × ३ × ३। अब ११४३ ÷ ५ = २२८। प्र० शे० = ३। अब

२२८ ÷ ३ = ७६, द्वि० शे० = ०। ७६ ÷ ३ = २५ तृ० शे० = १। यहाँ लब्धि २५ ठीक है, किन्तु शेष इसमें वास्तव नहीं होता। अतः शेष जानने के लिये यदि भाजक के दो खण्ड किये गये हों, तो—प्र० शेष + प्र० भाजक × द्वि० शेष = वा० शे०। यदि ३ खण्ड हों, तो—प्र० शे० + प्र० भा० × द्वि० शे० + प्र० भा० × द्वि० भा० × तृ० शे० = वा० शे०। इसी तरह आगे भी समझना चाहिए। उपरोक्त उदाहरण में—वास्तव शेष = १८ = ३ + ५ × ० + ५ × ३ × १।

भागहार की संक्षिप्त रीतियाँ—

(३) यदि किसी संख्या को ५, $५^२$, $५^३$, $५^४$, इनसे भाग देना हो, तो उस संख्या को क्रम से २, $२^२$, $२^३$, $२^४$ से गुणा कर क्रम से १०, $१०^२$, $१०^३$, $१०^४$ से भाग देने पर लब्धि आती है।

यथा—५३६८९ ÷ $५^२$ = $\frac{५३६८९ \times ४}{१००}$ = २१४७ शे० ५६।

(४) यदि किसी संख्या को १०, १००, १०००, १००००, आदि से भाग देना हो, तो भाजक में जितने शून्य हों, उतनी भाज्य की आदिम संख्या को शेष और बाँकी संख्या को लब्धि समझें।

जैसे ३६७१ ÷ १००० = ३ लब्धि। शेष ६७१।

भागफल जाँचने की रीति—

(५) यदि भाजक और लब्धि के गुणनफल में शेष जोड़ देने से भाज्य के समान हो जाय तो लब्धि ठीक है, अन्यथा नहीं।

लघुतम समापवर्त्य—

(१) वह सबसे छोटी संख्या, जो दो या अधिक संख्याओं से पूरी-पूरी बँट जाय, उन संख्याओं के लघुतम समापवर्त्य कहलाती है।

जैसे १५, ३०, ४५, ६०, आदि प्रत्येक ५ और ३ से पूरे-पूरे बँट जाते हैं, परन्तु इनमें सबसे छोटी संख्या १५ है, अतः ५ और ३ का लघुतम १५ है।

लघुतम निकालने का प्रकार—

(२) जिन संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालना हो, उनको एक पंक्ति में लिखकर उनमें ऐसे अङ्क से भाग देना चाहिए जिससे दो या दो

तीसरी संख्या का महत्तम समापवर्तक निकालना चाहिए। इसी तरह इच्छित संख्या पर्यन्त क्रिया करने से अन्त का फल जो होगा वही इच्छित संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगा। जैसे—१५, २५ और ४ का निकालना है तो पहले १५ और २५ का निकाला तो २ हुआ। अब २ और ४ का निकाला तो २ ही हुआ। अतः उन सबों का महत्तम समापवर्तक २ हुआ।

उत्पादक के द्वारा महत्तम समापवर्तक निकालना—

(४) जिन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक निकालना हो, उनका अलग-अलग उत्पादक निकाल कर जो-जो उत्पादक सबों में शामिल हो उनका गुणनफल उन सभी संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होता है।

यथा २५, ४५, ६०, ८५ इनका निकालना है, तो, इनका अलग-अल उत्पादक निकालने पर—

२५ = ५ × ५। ४५ = ३ × ३ × ५। ६० = ३ × २ × २ × ५।

८५ = १७ × ५। यहाँ देखने से स्पष्ट मालूम होता है कि ५ सबों में शामिल है, अतः उक्त संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ५ हुआ। जहाँ १ से अधिक टुकड़े सबों में शामिल हो, वहाँ उक्त सभी टुकड़ों का गुणन फल इष्ट महत्तम समापवर्तक होता है।

महत्तम समापवर्तक निकालो—

(१) ४८, ७६ (२) ९२, २३८ (३) ३०७, १२२८ (४) १२३२१, ६६२७ (५) ५८५०, १०२८५ (६) २४७२०, ८२६७६२ (७) ८०५, १९७८, १३११ (८) २६, ३९, ६५, ११७ (९) ४२, ४९, ६३ (१०) ३५८०, २५२३४८।

इति महत्तम समापवर्तनम्।

वर्गे करणसूत्रं वृत्तद्वयम्।

समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्कास्त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम्॥
खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिर्वा।
इष्टोनयुग्राशिवधः कृतिः स्यादिष्टस्य वर्गेण समन्वितो वा॥ ९॥

समद्विघातः कृतिः उच्यते । इति प्रथमः प्रकारः । अथ अन्त्यवर्गः स्थाप्यः, तथा परे (अङ्काः) द्विगुणान्त्यनिघ्नाः स्वस्वोपरिष्टात् स्थाप्याः । अन्त्यं त्यक्त्वा राशिमुत्सार्य पुनः क्रिया कार्या, तदा कृतिः स्यादिति द्वितीयः प्रकारः । वा खण्डद्वयस्याभिहतिः द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुता कृतिः स्यादिति तृतीयः प्रकारः । वा इष्टोनयुग्राशिवधः इष्टस्य वर्गेण समन्वितस्तदा कृतिः स्यादिति चतुर्थः प्रकारः॥

इसमें निम्न चार प्रकार के वर्ग करने की रीतियाँ कही गयी हैं ।

पहला प्रकार—यह है कि समान दो अङ्कों का गुणन फल वर्ग होता है । जैसे $५^२ = ५ \times ५$ ।

दूसरा प्रकार—जिस संख्या का वर्ग करना हो उसके अन्तिम अङ्क का वर्ग कर उस अङ्क के ऊपर रखना चाहिए । बाद में शेष अङ्कों को द्विगुणित अन्तिम अङ्क से गुणा कर अपने-अपने ऊपर में रक्खें । इसके बाद अन्तिम अङ्क को छोड़ कर शेष राशि को हटाकर पूर्वोक्त रीति से अन्त्यवर्ग इत्यादि क्रिया करें । यह क्रिया बारम्बार तबतक करें जबतक अङ्क बाँकी न रहे । जैसे १२ का वर्ग करना है तो अन्तिम अङ्क १ है, इसका वर्ग १ हुआ । इसको १ के ऊपर रख दिया, अब शेष अङ्क २ है । इसे द्विगुणित अन्तिम अङ्क $१ \times २ = २$ से गुणा कर २ के ऊपर रक्खा । अन्तिम अङ्क १ को छोड़ दिया, शेष २ को एक स्थान आगे बढ़ा कर लिखा और उसका वर्ग ४ को उसके ऊपर लिख दिया । आगे अङ्क नहीं है, इसलिए क्रिया समाप्त हो गयी । अब सबों को जोड़ दिया तो १४४ वर्ग हुआ ।

तीसरा प्रकार—जिसका वर्ग करना हो, उसका दो खण्ड करके उन दोनों खण्डों के गुणन फल को द्विगुणित कर उसमें उन दोनों खण्डों के वर्ग योग को जोड़ने पर वर्ग होता है । जैसे—८ का वर्ग करना है । अतः ८ को दो खण्ड ६ और २ किये । इन दोनों के गुणन फल १२ को द्विगुणित करने पर २४ हुआ । इसमें उन दोनों खण्डों के वर्ग योग $३६ + ४ = ४०$ को जोड़ दिया तो $२४ + ४० = ६४$ यही वर्ग हुआ ।

चौथा प्रकार—वर्ग करने वाला अङ्क में इष्ट संख्या को एक जगह जोड़ कर और दूसरी जगह घटा कर, उन दोनों योगान्तरों के घात में इष्ट का वर्ग जोड़ देने पर वर्ग होता है । जैसे ८ का वर्ग करना है, तो इष्ट २ को ८में

जोड़ने और घटाने पर १०, ६ हुये। इन दोनों का घात १० × ६ = ६० में इष्ट २ का वर्ग ४ जोड़ दिया तो ६० + ४ = ६४ वर्ग हुआ।

उपपत्तिः—द्वयोस्तुल्यसंख्ययोर्घातो वर्गः कथ्यते, इति तु परिभाषारूप एव ॥ १ ॥

कल्प्यते अ = क + ग। ∴ $अ^2$ = अ × अ = (क + ग) (क + ग) = $क^2$ + क ग + क·ग + $ग^2$ = क + २ क·ग + $ग^2$। अस्यावलोकनेनैव 'स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नः' इति पद्यं तथा 'खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी' इति पद्यं च समुपपन्नं भवति। अथ वर्गान्तरं तु योगान्तरघातसमो भवतीति नियमात्—

$रा^2$ − $इ^2$ = (रा + इ) (रा − इ)। ∴ $रा^2$ = (रा + इ) (रा − इ) + $इ^2$।

अत उपपन्नश्चतुर्थः प्रकारः। इति।

अत्रोद्देशकः।

सखे नवानां च चतुर्दशानां ब्रूहि त्रिहीनस्य शतत्रयस्य।
पञ्चोत्तरस्याप्ययुतस्य वर्गं जानासि चेद्वर्गविधानमार्गम् ॥ १ ॥

हे मित्र यदि तुम वर्ग करने की विधि जानते हो, तो—९, १४, २९७ और १०००५ का वर्ग बताओ।

न्यासः। ९। १४। २९७। १०००५। एषां यथोक्तकरणेन जाता वर्गाः। ८१। १९६। ८८२०९। १००१०००२५।

अथ वा नवानां खण्डे (५। ४) अनयोराहति—(२०) द्विनिघ्नी (४०) तत्खण्डवर्गैक्येन (४१) युता जाता सैव कृतिः ८१।

अथ वा चतुर्दशानां खण्डे (६। ८) अनयोराहति–(४८) द्विनिघ्नी (९६) तत्खण्डवर्गौ (३६। ६४) अनयोरैक्येन (१००) युता जाता सैव कृतिः १९६।

अथ वा खण्डे (४। १०) तथापि सैव कृ तः १९६।

अथ वा राशिः २९७। अयं त्रिभिरूनः पृथग्युतश्च २९४। ३००।

अनयोर्घातः ८८२००। त्रिवर्ग-९ युतो जातो वर्गः स एव ८८२०९। एवं सर्वत्रापि।

इति वर्गः।

उदाहरण—पहली रीति से $९^२ = ९ \times ९ = ८१$ । $१४^२ = १४ \times १४ = १९६$ । $२९७^२ = २९७ \times २९७ = ८८२०९$ । $१०००५^२ = १००१०००२५$ । दूसरी रीति से—२९७ का वर्ग करना है, तो पहले अन्त्य अङ्क २ के वर्ग ४ को २ के ऊपर रक्खा। अब द्विगुणित अन्तिम अङ्क ४ से आगे के ९ और ७ को अलग २ गुणा कर उनके ऊपर में रख दिया। बाद में २ को छोड़ कर बाँकी ९७ को आगे उठा कर रक्खा, फिर ९ के वर्ग ८१ को उसके ऊपर निवेश किया। अब द्विगुणित अन्तिम अङ्क १८ से ७ को गुणा करने पर १२६ हुआ। इसमें ६ को ७ के ऊपर २ को ९ के ऊपर और १ को उसकी बाँयी बगल वाले अङ्क के ऊपर रक्खा। फिर ९ को छोड़ा और ७ को उठा कर आगे लिख कर उसका वर्ग ४९ को उसके ऊपर लिख दिया। आगे अङ्क नहीं है, अतः क्रिया समाप्त हो गयी। शेष में सबों को जोड़ने पर ८८२०९ वर्ग हुआ। इसी तरह सभी संख्याओं का वर्ग करना चाहिए। इससे सरल तीसरा और चौथा प्रकार है। उन सबों का उदाहरण मूल में स्पष्ट है, अतः यहाँ नहीं लिखा गया ॥ ९ ॥

```
    १        } योग करने
  ८ २        } का अङ्क
३ २ १ ४
४ ६ ८ ६ ९
२ ९ ७ प्रथमवार
    ९ ७ = द्वि. वार
        ७ = तृ. वार
------------------
योग = ८८२०९
```

इति वर्गविधिः ।

वर्ग परिशिष्ट

(१) दूसरी रीति में अङ्क का निवेश जो उपर्युपरि किया गया है, वह सिलेट के बिना ठीक नहीं होता, अतः सीधे भी कर सकते हैं।

यथा १४ का वर्ग करना है, तो $१४ = ५ + ४ + ३ + २$ ।

$\therefore १४^२ = (५ + ४ + ३ + २)^२$ । इनका वर्ग दूसरा प्रकार से करने पर $= २५ + ४० + ३० + २० + १६ + २४ + १६ + ९ + १२ + ४ = १९६$ । एवं— $(२५)^२ = (१५ + १०)^२ = २२५ + ३०० + १०० = ६२५$ ।

अभ्यासार्थ प्रश्न :—

वर्ग बताओ ।

(१) २५, ५०, ३५ (३) ६०, ३०, ३५

(२) १३, ३९७, २१ (४) १०६४८

(५) ५७८८	(८) २९४२१६
(६) ८३९२११	(९) ८८२०७३५५
(७) ५८२०४६	(१०) ७५३२५०

इति ।

अथ वर्गमूलावबोधः ।

वर्गमूले करणसूत्रं वृत्तम् ।

त्यक्त्वाऽन्त्याद्विषमात्कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते
त्यक्त्वा लब्धकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत् ।
पङ्क्त्यां पङ्क्तिहृते समेऽन्यविषमात् त्यक्त्वाऽऽप्तवर्गं फलं
पङ्क्त्यां तद्द्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पंक्तेर्दलं स्यात् पदम् ॥१०॥

अन्त्यात् विषमात् कृतिं त्यक्त्वा मूलं द्विगुणयेत्, तद्धृते समे लब्धकृतिं तदाद्यविषमात् त्यक्त्वा लब्धं द्विनिघ्नं पंक्त्यां न्यसेत् । समे पंक्तिहृते अन्यविषमात् आप्तवर्गं फलं त्यक्त्वा तद्द्विगुणं पंक्त्यां न्यसेत् इति मुहुः क्रिया कार्या, तदा पंक्तेः दलं पदं स्यात् ॥ १० ॥

जिस संख्या का वर्गमूल निकालना हो उसके अन्तिम विषम अङ्क में जिस संख्या का वर्ग घटे उसको घटाकर उसी संख्या को दूना करके सम अङ्क में भाग दें, लब्धि के वर्ग को आद्य विषम में घटाकर लब्धि को दूनाकर एक स्थान में रखकर सम अङ्क में भाग दें। तब लब्धि के वर्ग को अन्य विषम में घटा दें, मूल को दूना कर पंक्ति में रक्खें। इस प्रकार जब तक अङ्क निःशेष न हो जाय तब तक क्रिया करनी चाहिए। अन्त में पंक्ति का आधा वर्गमूल हो जायगा। इसका भाव यह है कि जिस २ अङ्क का वर्ग घटाया जाय उस २ अङ्क को द्विगुणित कर एक २ स्थान बढ़ाकर लिखें। अन्त में जिसका वर्ग घटे उसे भी दूनाकर लिख दें। शेष में सबों का योगार्ध करने पर वर्गमूल के समान होता है। इसके तुल्य वर्गमूल न हो तो उसे अशुद्ध जानना चाहिए ॥ १० ॥

उपपत्तिः—$(\text{क} + \text{ग})^{2} = \text{क}^{2} + 2\,\text{क}\,\text{ग} + \text{ग}^{2}$, अस्य स्वरूपावलोकनेन

स्पष्टं ज्ञायते यत्प्रथममन्त्याङ्कवर्गस्ततो द्विगुणितान्त्योपान्त्याङ्कयोर्घातस्तत उपान्त्यवर्गस्तेन अन्त्याद्विषमाङ्काद्यस्य वर्गः शुध्यति तं शोधयेत् ततस्तेन द्विगुणित-मूलेन समे भक्ते सत्युपान्तिमाङ्कः स्यात्तस्यवर्गं तदाद्यविषमे शोधनेन मूलं स्यात् । शेषसत्त्वे तु पुनर्मूलं द्विगुणयेदित्यादि क्रिया कर्तव्योचितैवेति सर्वमुपपन्नम् ॥१०॥

अत्रोद्देशकः ।

मूलं चतुर्णां च तथा नवानां पूर्वं कृतानां च सखे कृतीनाम् ।
पृथक् पृथग्वर्गपदानि विद्धि बुद्धेर्विवृद्धिर्यदि तेऽत्र जाता ॥११॥

हे मित्र ! यदि तेरी बुद्धि में वृद्धि हुई है, तो ४ और ९ का एवं पहले किये हुए वर्गों का वर्गमूल अलग २ बताओ ।

न्यासः ४ । ९ । ८१ । १९६ । ८८२०९ । १००१०००२५ । लब्धानि क्रमेण मूलानि २ । ३ । ९ ।१४ ।२९७ । १०००५ ।

इति वर्गमूलम् ।

(१) उदाहरण—८१ का वर्गमूल निकालना है, तो पहले ८१ के ऊपर विषम अङ्क १ के ऊपर विषम चिह्न (।) और सम अङ्क ८ के ऊपर सम चिह्न (—) यह लगाया ($\overset{-\ \mid}{८१}$) । अङ्क में जितने विषम चिह्न होंगे उतने ही वर्गमूल में अङ्क होंगे, यह समझना चाहिए । यहाँ अन्त्य अङ्क विषम एक ही होने के कारण अन्त्य विषमाङ्क ८१ को मानकर इसमें ९ का वर्ग घटता है, अतः ९ वर्गमूल हो गया । आगे अङ्क नहीं है, अतः क्रिया नहीं बढ़ी ।

(२) १९६ का वर्गमूल लेने के लिए विषम और सम का चिह्न लगाया

```
          | - |
      १ ) १९६ ( १४
१ × २=२ )  १
          ----
           ०९
            ८
          ----
           १६
           १६
          ----
           ००
```

तो दो विषम अङ्क मालूम हुए, अतः दो अङ्क मूल में होंगे, यह निश्चय हुआ । अब सूत्र के अनुसार अन्तिम विषम अङ्क १ में १ का वर्ग घटा । मूल एक को दूना कर समअङ्क ९ में भाग देने पर लब्धि ४ हुई । अब चार का वर्ग १६ को आद्य विषम १६ में घटाया तो शेष शून्य रहा, अतः १९६ का मूल १४ हुआ । यहाँ पहले १ का और पीछे ४ का वर्ग घटा है, अतः दोनों को दूना कर एक स्थान

बढ़ाकर पंक्ति में लिखने पर २८ हुआ। इसका आधा १४ है, अतः उपरोक्त मूल ठीक है।

(३) ८८२०९ का वर्ग मूल निकालना है, अतः अन्तिम विषमाङ्क ८ में २ का वर्ग घटा शेष ४ पर ८ उतरा तो समाङ्क ४८ हुआ। अब २ को दूना कर ४८ में भाग दिया तो लब्धि ९ और शेष १२ हुआ। १२ ऊपर २ विषमाङ्क उतरा तो १२२ हुआ। इसमें ९ का वर्ग ८१ को घटाया तो ४१ शेष बचा। ४१ ऊपर ० उतरा तो समाङ्क ४१० हुआ। अब लब्धि के स्थान में २९ अङ्क है। अतः इसको दूना कर समाङ्क ४१० में भाग दिया तो लब्धि ७ और शेष ४ रहा। ४ ऊपर ९ उतरा तो ४९ विषमाङ्क हुआ। इसमें ७ का वर्ग घटा तो शेष शून्य हुआ। आगे अङ्क नहीं है, अतः क्रिया समाप्त हो गयी, लब्धि के स्थान में २९७ है, अतः यह मूल हुआ। यहाँ २, ९ और ७ के वर्ग घटे हैं। अतः इनको दूना कर एक स्थान बढ़ाकर लिखा और जोड़ा तो $\left(\frac{\overset{१}{४}\overset{१}{८}४}{५९४}\right)$ ५९४ हुआ। इसका आधा किया तो २९७ मूल के समान हो गया। इसी तरह १००१०००२५ इसका भी वर्गमूल लेने से १०००५ हुआ।

वर्गमूल परिशिष्ट—

(१) नवीन रीति से वर्गमूल का आनयन।

२	८८२०९	२९७
	४	
४९	४८२	
९	४४१	
४४१	४१०९	
	४१०९	
४९	००	
९		
५८		
५८७		

८८२०९ का वर्गमूल निकालना है, तो पहले विषम अङ्कों पर शून्य का चिह्न लगाने से यह मालूम किया कि ३ अङ्क इसके वर्गमूल में होंगे। अब अन्तिम अङ्क ८ में २ का वर्ग घटा, शेष ४ पर जोड़ा अङ्क ८ और २ उतरा। लब्धि २ को दूना करने से ४ हुआ। ४ से ४८ में भाग देने पर लब्धि ९ को ४ और २ दोनों पर उतारा। ९ से ४९ को गुणाकर ४८२ में घटाया तो शेष ४१। इस पर जोड़ा अङ्क ० और ९ उतारा। ४९ में ९ जोड़ने से ५८ हुआ। ५८ से ४१० में भाग देने पर लब्धि ७ को २९ और ५८ पर रक्खा। अब ५८७ को ७ से गुणाकर ४१०९ में घटाया तो शेष शून्य रहा, अतः ८८२०९ का वर्गमूल २९७ हुआ।

(२) किसी संख्या के ऐसे गुणनीयक, जिनका फिर टुकड़ा, न हो सके, उस संख्या के वे उत्पादक कहलाते हैं और वे टुकड़े रूढ़ि कहलाते हैं।

यथा १८९० = ३ × ३ × ३ × २ × ५ × ७

यहाँ इन टुकड़ों का फिर टुकड़े नहीं हो सकते हैं। अतः ये प्रत्येक १८९० के उत्पादक हैं।

उत्पादक के द्वारा—वर्गमूल लाने की विधि।

(३) ८८२०९ = ३ × २९४०३ = ३ × ३ × ९८०१

= ३ × ३ × ३ × ३२६७ = ३ × ३ × ३ × ३ × १०८९

= ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × ३६३ = ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × १२१

= ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × ११ × ११ = $३^२ × ३^२ × ३^२ × ११^२$

$\therefore \sqrt{८८२०९}$ = ३ × ३ × ३ × ११ = २९७।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः—

वर्गमूल बताओ।

(१) १५००६२५ (२) ३९०६२५ (३) १०२४ (४) ३७२१ (५) १६०८०१ (६) ६२५०००० (७) ९९३५१०४ (८) ५०६२५।

इति।

अथ घनविधिः।

अथ घने करणसूत्रं वृत्तत्रयम्।

समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः।
आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्गस्त्र्यन्त्याहतोऽथादिघनश्च सर्वे ॥११॥
स्थानान्तरत्वेन युता घनः स्यात् प्रकल्प्य तत्खण्डयुगं ततोऽन्त्यम्।
एवं मुहुर्वर्गघनप्रसिद्धावाद्याङ्कतो वा विधिरेष कार्यः ॥ १२ ॥
खण्डाभ्यां वा हतो राशिस्त्रिघ्नः खण्डघनैक्ययुक्।
वर्गमूलघनः स्वघ्नो वर्गराशेर्घनो भवेत् ॥ १३ ॥

बराबर तीन संख्याओं के गुणन फल को घन कहते हैं। जैसे ९ का घन = ९ × ९ × ९ = ७२९।

दूसरा प्रकार—यह है कि जिस संख्या का घन करना हो, उसका पहले अन्त्य अङ्क का घन स्थापित करें, फिर अन्त्य के वर्ग को त्रिगुणित आदिम अङ्क से गुणा कर लिखें। बाद में आदिम अङ्क के वर्ग को त्रिगुणित अन्त्य अङ्क से गुणा कर लिखें। तब आदिम अङ्क के घन को लिखकर सबों का स्थानान्तर के क्रम से योग करने पर घन होता है। यदि अधिक अङ्क होवे तो उन दोनों खण्डों को अन्त्य अङ्क मानकर आगे का एक अङ्क लेकर दो खण्ड कल्पना कर पहली रीति के अनुसार क्रिया करनी चाहिए। इस तरह तबतक क्रिया करनी चाहिए जब तक अङ्क निःशेष हो जाय। वा—आदिम अङ्क से ही क्रिया करने पर घन होता है।

तीसरा प्रकार—जिस राशि का घन करना हो उसको दो टुकड़े कर दोनों टुकड़ों से राशि को गुणा कर फिर तीन से गुणा करें। गुणन फल में दोनों टुकड़ों के घनयोग के जोड़ने से घन होता है। जैसे ३ का घन करना है, तो ३ = १ + २। अब ३ को १ और २ से गुणा करने पर ६ हुआ। ६ को ३ से गुणा किया १८ हुआ। इसमें १ का घन १ और २ का घन २ × २ × २ = ८, इन दोनों का योग ९ को १८ में जोड़ा तो २७ हुआ। यही ३ का घन है।

चौथा प्रकार—जिस वर्गात्मक संख्या का घन करना हो, उसके वर्गमूल का घन करके, फिर उसका वर्ग करें तो घन होता है। जैसे ४ का घन करने के लिए ४ का वर्गमूल २ का घन ८ है, इसका वर्ग किया तो ६४ हुआ। यही ४ का घन है ॥ १३ ॥

उपपत्तिः—त्रयाणां तुल्याङ्कानां घातो घन इति विशेषगुणनपरिभाषारूपैव। यदि राशिः = रा = अ + क तदा घनपरिभाषया रा^{3} = रा × रा × रा = (अ + क)(अ + क)(अ + क)।

= (अ^2 + २ अ क + क^2)(अ + क) = अ^3 + २ अ^2 क + अ क^2 + अ^2 क + २ अ क^2 + क^3।

= अ^3 + ३ अ^2 क + ३ अ क^2 + क^3। अस्यावलोकनेनैव—'स्थाप्योऽन्त्यघनोऽन्त्यस्य ततोऽन्त्यवर्गः' इति पद्यमुपपद्यते।

एवं पूर्वयुक्त्या—रा^{3} = अ^3 + ३ अ^2 क + ३ अ क^2 + क^3

= अ^{3} + ३ अ क (अ + क) + क^{3} = अ^{3} + ३ अ क रा + क^{3} ।

= ३ अ × क × रा + अ^{3} + क^{3} । एतेन 'खण्डाभ्यां वा हतो राशि' इति पद्यमुपपन्नम् । यदि राशिः = अ^{2} तदाऽस्य घनः—

रा^{3} = (अ^{2})^{3} = अ^{6} = अ^{3} × अ^{3} । अतएव 'वर्गमूलघनः स्वघ्नः' इति सूत्रमुपपन्नम् ॥ ११–१३ ॥

अत्रोद्देशकः ।

नवघनं त्रिघनस्य घनं तथा कथय पञ्च घनस्य घनं च मे ।
घनपदं च ततोऽपि घनात् सखे यदि घनेऽस्ति घना भवतो मतिः ॥१॥

हे मित्र ! यदि घन क्रिया में तेरी बुद्धि निपुण है, तो ९ का घन, ३ के घन २७ का घन और ५ के घन १२५ का घन बताओ और उन घनों के घनमूल भी कहो ॥ १ ॥

न्यासः ९ । २७ । १२५ ।

जाताः क्रमेण घनाः ७२९ । १९६८३ । १९५३१२५ ।

अथ वा राशिः । ९ । अस्य खण्डे ४ । ५ । आभ्यां राशिर्हतः १८० । त्रिनिघ्नश्च ५४० । खण्डघनैक्येन १८९ । युतो जातो घनः ७२९ ।

अथ वा राशिः २७ । अस्य खण्डे २० । ७ आभ्यां हतस्त्रिघ्नश्च ११३४० । खण्डघनैक्येन ८३४३ युतो जातो घनः १९६८३ ।

अथ वा राशिः ४ । अस्य मूलं २ । घनः ८ । अयं स्वघ्नो जातश्चतुर्णां घनः ६४ ।

वा राशिः ९ अस्य मूलम् ३ । घनः २७ अस्य वर्गो नवानां घनः ७२९ । यो वर्गघनः स एव वर्गमूलघनवर्गः । बीजगणितेऽस्योपयोगः ।

इति घनः ।

उदाहरण—पहली रीति से ९^{3} = ९ × ९ × ९ = ७२९ ।

२७^{3} = २७ × २७ × २७ = १९६८३ । १२५^{3} = १२५ × १२५ × १२५ = १९५३१२५ ।

दूसरी रीति से २७ का घन करना है, तो यहाँ अन्त्य अङ्क २ का घन ८ को लिखकर अन्तिमाङ्क २ के वर्ग ४ को त्रिगुणित आदिम अङ्क (७ × ३) = २१ से गुणा करने पर (२१ × ४) = ८४ हुआ । इसको स्थानान्तर करके अर्थात

८ घन के ऊपर ८ लिखकर उसके दायें भाग में एक स्थान बढ़ाकर ४ लिखा। बाद में आदिम अङ्क ७ के वर्ग ४९ को त्रिगुणित अन्तिमाङ्क (३ × २) = ६ से गुणा करने से २९४ हुआ। इसको उक्त क्रम से लिखा। अन्त में आदिम अङ्क ७ का घन ७ × ७ × ७ = ३४३ को रखकर सबों को स्थानान्तर से जोड़ने पर १९६८३ हुआ। उपरोक्त रीति से अङ्कों को स्थापित करने पर—निम्नलिखित रूप हुआ ॥ १२ ॥

२३
८९४
८४४३
१९६८३

इसी तरह १२५ का घन करने पर १९५३१२५ होता है।

तीसरा प्रकार—१२५ का घन करने के लिए इसके दो टुकड़े १०० और २५ किये। अब सूत्र के अनुसार १२५ को दोनों टुकड़ों से गुणा करने पर १२५ × १०० × २५ = १२५०० × २५ = ३१२५०० । इसे ३ से गुणा किया तो ३१२५०० × ३ = ९३७५०० हुआ। इसमें दोनों टुकड़ों के घन योग १००००००+१५६२५ = १०१५६२५ को जोड़ने पर ९३७५०० + १०१५६२५ = १९५३१२५ यह घन हुआ।

इसी तरह प्रत्येक राशि का घन किया जा सकता है।

चौथा प्रकार—९ का घन करना है, तो ९ का वर्गमूल ३ का घन करने पर ३ × ३ × ३ = २७ हुआ। इसका वर्ग करने से २७ × २७ = ७२९, यही ९ का घन है।

घन परिशिष्ट

(१) किसी संख्या का दो से अधिक टुकड़ों द्वारा घन निकालना। यथा २२४ का घन करना है, तो इसे ३ टुकड़ों २००, १०, १४ में बाँटा। २२४^3 = २२४ × २२४ × २२४ = $(२०० + १० + १४)^3$ यहाँ (२०० + १०) = अन्त्य, १४ = आदि ; अब दूसरी रीति से $(२०० + १०)^3$ + ३ × १४ $(२०० + १०)^2$ + ३ × (२०० + १०) × १४^2 + १४^3=२१०^3 + ४२$(२१०)^2$ + ३ × २१० × १९६ + २७४४=९२६१००० + १८५२२०० + १२३४८० + २७४४ = ११२३९४२४ = उत्तर।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः—

घन बताओ।

(१) १९७ (२) ३१२ (३) ९९९ (४) ६२५ (५) ७२५ (६) १२१८

(७) १३१२२ (८) २५५६४२ (९) (१० + १२ + ५) (१०) (३६ + ३४) (११) (१० + १० + ५) ।

इति घनपरिशिष्टम् ।

अथ घनमूले करणसूत्रं वृत्तद्वयम्—

आद्यं घनस्थानमथाघने द्वे पुनस्तथाऽन्त्याद् घनतो विशोध्य ।
घनं पृथक्स्थं पदमस्य कृत्या त्रिघ्न्या तदाद्यं विभजेत् फलं तु ॥
पङ्क्त्यां न्यसेत् तत्कृतिमन्त्यनिघ्नीं त्रिघ्नीं त्यजेत् तत्प्रथमात् फलस्य ।
घनं तदाद्याद् घनमूलमेवं पङ्क्तिर्भवेदेवमतः पुनश्च ॥ १५ ॥

जिस संख्या का घनमूल निकालना हो उसके इकाई वाले अङ्क पर घन का चिह्न (।) लगाकर, बाद के दो अङ्कों पर अघन का चिह्न (– –) लगावे । इसी तरह आगे के अङ्कों में एक घन और दो अघन होते हैं । इस प्रकार जब तक अङ्क शेष न हो जाय तब तक घन और अघन का चिह्न लगाना चाहिए । घन चिह्न के तुल्य ही अङ्क घनमूल में होते हैं ।

घन चिह्न वाले अन्तिम अङ्क में जिसका घन घटे वह घटाकर उस घनमूल को अलग रखें । बाद में उस (घनमूल) के वर्ग को ३ से गुणा कर आदि के अघन में भाग दें । लब्धि को पंक्ति में न्यास करें । अब उसके वर्ग को त्रिगुणित अन्त्य अङ्क से गुणा कर द्वितीय अघन में घटा दें और लब्धि के घन को अघन के समीप के घन में घटा दें । यदि अङ्क शेष रहे तो फिर इसी तरह क्रिया करने पर घनमूल होता है ॥ १४–१५ ॥

जैसे ७२९ का घनमूल निकालना है तो ७२९ पर घन और अघन चिह्न लगा दिया । इसमें एक ही घन का चिह्न है, अतः ७२९ में जिसका घन घटेगा वही इसका घनमूल होगा । विचारने पर ९ का घन ७२९ घटा, अतः $\sqrt[3]{७२९} = ९$ हुआ ।

उपपत्ति:—कल्प्यते $(अ + क)^3 = अ^3 + ३\ अ^2\ क + ३\ अ\ क^2 + क^3$ अत्र स्वरूपावलोकनेन 'आद्यं घनस्थानमथाघने द्वे' इति यद् घनाघनचिह्ननिवेशनप्रकारोऽस्ति तद्युक्तियुक्तमेव प्रतिभाति । तथान्त्याद्घनतो यस्य घनः शुध्यति सोऽन्तिमाङ्कस्ततस्त्रिगुणितान्त्यवर्गेण विभक्तोऽघन उपान्तिमाङ्कः स्यात् । तत्त्रि-

३ ली०

नेन शेषे उपान्तिमाङ्कघने शोधिते यदि शेषा भावस्तदा तदेव घनमूलम्, अन्यथा शेषसत्त्वे पुनरस्य कृत्वा त्रिघ्न्येत्यादिविधिः कर्तव्या एवेति सर्वमुपपन्नम् ।

अत्रोद्देशकः ।

पूर्वघनानां मूलार्थं न्यासः ७२९ । १९६८३ । १९५३१२५ ।
क्रमेण लब्धानि मूलानि ९ । २७ । १२५ ।

इति घनमूलम् ।

इति परिकर्माष्टकं समाप्तम् ।

उदाहरण—७२९ का घनमूल पहले दिखाया गया है । यहाँ १९६८३ का घनमूल निकालना है, अतः अन्तिम घनाङ्क ९ होने से १९ में २ का घन ८ घटाने पर ११ बचा, इस पर ६ उतारने से ११६ हुआ । इसमें त्रिगुणित २ का वर्ग ३ × ४ = १२ से भाग देने पर ८ या ९ भी लब्धि हो सकती है किन्तु ऐसा करने पर आगे की क्रिया रुक जायगी अतः ७ ही लब्धि ली अब ११६ में ८४ घटाने पर शेष ३२ रहा, इस पर ८ उतारने से ३२८ हुआ । इसमें लब्धि ७ के वर्ग ४९ को त्रिगुणित अन्त्य ३ × २ = ६ से गुणा करने पर २९४ को घटाने से ३२८ − २९४ = ३४ हुआ । इस पर ३ उतारा तो ३४३ हुआ । इसमें फल ७ का घन ३४३ घटाने से शेष नहीं रहा, अतः १९६८३ का घनमूल २७ हुआ । इसी तरह १९५३१२५ का घनमूल निकालने से १२५ होता है ।

घनमूल परिशिष्ट

(१) उत्पादक के द्वारा घनमूल निकालना ।

जिस घनात्मक संख्या का घनमूल निकालना हो, उसका पहले उत्पादक निकाले । उत्पादक में प्रत्येक अङ्क ३ वार आते हैं, इसलिए उन अङ्कों में से एक-एक को लेकर सब का घात करने पर घनमूल होंगे ।

यथा—१९६८३ का घनमूल निकालना है अतः—१९६८३ = ३ × ६५६१ = ३ × ३ × २१८७ = ३ × ३ × ३ × ७२९ = ३ × ३ × ३ × ३ × २४३ = ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × ८१ = ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × ३ × २७ =

२ × २ × २ × २ × २ × २ × २ × १ = २ × २ × २ × २ × २ × २ × २ × २ । इन अङ्कों में से एक-एक लेकर घात किया तो ३ × ३ × ३ = २७ । यही घनमूल हुआ ।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः—

घनमूल बताओ—

(१) ४६६५६ (२) १०५८२३८१७ (३) १८५१९३ (४) ३७३२४८ (५) ७०४९६९ (६) १५६२५ (७) २१९७ (८) ११७६४९ ।

इति घनमूलपरिशिष्टम् ।

अथ भिन्नपरिकर्माष्टकम् ।

तत्रादावंशसवर्णनम् । तत्रापि भागजातौ करणसूत्रं वृत्तम् ।

अन्योन्यहाराभिहतौ हरांशौ राश्योः समच्छेदविधानमेवम् ।
मिथो हराभ्यामपवर्त्तिताभ्यां यद्वा हरांशौ सुधियाऽत्र गुण्यौ ॥१॥

राश्योः हरांशौ अन्योन्यहाराभिहतौ (कार्यौ), एवं समच्छेदविधानं स्यात् । यद्वा अपवर्तिताभ्यां हराभ्यां हरांशौ सुधिया अत्र मिथः गुण्यौ (गुणनीयौ) तदा समच्छेदविधिः स्यादिति ॥ १ ॥

इस सूत्र में अङ्कों की सवर्णता और भाग-जाति की क्रिया कही गयी हैं । विधि यह है कि एक राशि के हर से दूसरी राशि के हर और अंश को गुणा करे, फिर दूसरी राशि के हर से प्रथम राशि के हर और अंश को गुणा करे । इस तरह क्रिया करने पर समच्छेद (सब में तुल्य हर) होता है । तुल्य हर होने के बाद यदि भिन्नाङ्कों का योग करना हो तो ऊपर वाले अङ्कों का योग कर नीचे में तुल्य हर को रखने से योग होगा । अन्तर करना हो तो अन्तर कर नीचे में तुल्य हर देने से भिन्नाङ्कों का अन्तर होगा । अथवा संभव रहने पर किसी अङ्क से हरों को अपवर्तन देकर, उन अपवर्तित हरों से परस्पर हर और अंश को गुणा करने पर भी समच्छेद होता है । इसे भागजाति कहते हैं ।

जैसे $\frac{३}{४}$ में $\frac{३}{८}$ को जोड़ना है तो प्रथम रीति से समच्छेद करने पर $\frac{२४}{३२} + \frac{१२}{३२} = \frac{३६}{३२} = \frac{९}{८}$ = योगफल ।

अथवा दूसरी रीति से हर ४, ८ को ४ से अपवर्तन दिया तो १, २ हुए। अब १, २, से परस्पर हर और अंश को गुणा किया तो $\frac{४}{८}$, $\frac{३}{८}$ हुए। दोनों को जोड़ने पर $\frac{७}{८}$ हुआ। यह योगफल पहले के तुल्य ही आया।

विशेष—(भिन्न की परिभाषा) जो कोई राशि इकाई के एक, वा अधिक समान भागों से बनी रहती है उसे भिन्न कहते हैं। साधारण भिन्न सम, विषम और संयुक्त भिन्न के भेद से तीन प्रकार के होते हैं। जिसमें अंश हर से छोटा हो उसे समभिन्न कहते हैं। समभिन्न के विपरीत विषमभिन्न होता है। संयुक्त भिन्न में पूर्णाङ्क और समभिन्न दोनों रहते हैं। जैसे—$२\frac{५}{८}$, $३\frac{२}{५}$, $९३\frac{१७५}{२८३१}$। भागजाति भिन्न उसे कहते हैं जिसमें हर और अंश दोनों पूर्णाङ्क हों। प्रभागजाति भिन्न वे हैं जिनमें हर वा अंश या दोनों पूर्ण संख्या न हों, जैसे—$\frac{\frac{२}{३}}{५}$, $\frac{\frac{१}{२}}{\frac{५}{२}}$, $\frac{\frac{१}{३}}{७}$। यदि कोई संख्या अपने किसी अंश से युक्त हो तो उसे भागानुबन्ध कहते हैं। यदि कोई संख्या अपने किसी भाग से हीन हो तो उसे भागापवाह कहते हैं।

उपपत्तिः—अत्र कल्प्येते भिन्नराशी $\frac{अ}{क}, \frac{ग}{घ}$ अनयोर्योगान्तरकरणमिष्टमतः सजातीयकरणार्थं कल्पितम्— $\frac{अ}{क} = च$, $\frac{ग}{घ} = प$, $\therefore$ अ = क च, एवं ग = घ प। $\therefore$ अ घ = क·च·घ तथा ग·क = घ·प·क। $\therefore$ अ·घ $\mp$ ग·क = क·च·घ $\pm$ घ·प·क = क·घ·(च $\pm$ प) $\therefore$ च $\pm$ प = $\frac{अ·घ· \pm ग·क·}{क घ}$,

अत उपपन्नं पूर्वार्द्धम्। यदि $\frac{क}{म} = व$, तथा $\frac{घ}{म} = स$, तदा क = म·व·घ = म·स, तत आभ्यां क, घ मानाभ्यां पूर्वस्वरूपमुत्थापनेन च $\pm$ प =

$$\frac{अ·म·स \pm ग·म·व}{म·व·म·स} = \frac{म\,(अ·स· \pm ग·व)}{म^{२}·व·स} = \frac{अ·स \pm ग·व}{म·व·स} = \frac{अ·स}{म·व·स}$$

$\frac{ग·व}{म·व·स}$ परन्तु क = म·व एवं घ = म·स $\therefore \frac{अ·स}{क·स} \pm \frac{ग·व}{घ·व}$ उपपन्नं सर्वम्।

अत्रोद्देशकः ।

रूपत्रयं पञ्चलवस्त्रिभागो योगार्थमेतान् वद तुल्यहारान् ।
त्रिषष्टिभागश्च चतुर्दशांशः समच्छिदौ मित्र वियोजनार्थम् ॥ १ ॥

हे मित्र ! योग करने के लिये $\frac{३}{१}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{३}$ इन भिन्नाङ्कों का तथा अन्तर करने के लिये $\frac{१}{६३}$, $\frac{१}{१४}$ इनका समच्छेद बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । $\frac{३}{१}$ $\frac{१}{५}$ $\frac{१}{३}$ ।

जाताः समच्छेदाः $\frac{४५}{१५}$ $\frac{३}{१५}$ $\frac{५}{१५}$ । योगे जातम् $\frac{५३}{१५}$ ।

अथ द्वितीयोदाहरणार्थं न्यासः $\frac{१}{६३}$ $\frac{१}{१४}$ ।

समापवर्त्तिताभ्यां हराभ्यां ९, २ संगुणितौ, समच्छेदौ $\frac{२}{१२६}$ $\frac{९}{१२६}$ । वियोजिते जातम् $\frac{७}{१२६}$ ।

इति भागजातिः ।

उदाहरण—$\frac{३}{१}$ $\frac{१}{५}$ $\frac{१}{३}$ इनका योग करना है अतः सूत्र के अनुसार प्रत्येक राशि के हर से शेष राशियों के हरों और अंशों को आपस में गुणा कर योग करने से—$\frac{३\times५\times३}{१\times५\times३}+\frac{१\times१\times३}{५\times१\times३}+\frac{१\times१\times५}{३\times५\times१}=\frac{४५}{१५}+\frac{३}{१५}+\frac{५}{१५}=\frac{५३}{१५}=$ उत्तर।

$\frac{१}{१४}$, $\frac{१}{६३}$ इन दोनों का अन्तर करना है अतः पहली रीति से समच्छेद कर अन्तर करने से—$\frac{६३}{१४\times६३}-\frac{१४}{१४\times६३}=\frac{४९}{८८२}=\frac{७}{१२६}=\frac{१}{१८}=$ उत्तर ।

दूसरी रीति से—$\frac{१}{१४}$, $\frac{१}{६३}$ यहाँ हरों को ७ से अपवर्तन देने से क्रम से २ और ९ हुये । इनसे परस्पर हर और अंश को गुणा करने पर $\frac{९}{१२६}$, $\frac{२}{१२६}$ हुये । दोनों का अन्तर करने से $\frac{९}{१२६}-\frac{२}{१२६}=\frac{७}{१२६}=\frac{१}{१८}=$ उत्तर ।

अथ प्रभागजातौ करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

लवा लवघ्नाश्च हरा हरघ्ना भागप्रभागेषु सवर्णनं स्यात् ।

भागप्रभागेषु (प्रभागजातौ) लवा लवघ्नाः (अंशाः अंशैर्गुणिताः) हरा हरघ्नाश्च (हराश्च हरैर्गुणिताः) कार्यास्तदा सवर्णनं स्यादिति ।

प्रभागजाति वह कहलाती है जिसमें भाग का भी भाग किया जाय। प्रभागजाति में अंशों से अंशों को और हरों से हरों को गुणा करने पर समच्छेद होता है । जैसे २ के अष्टमांश का तृतीयांश क्या होगा ? यहाँ $\frac{२}{१}$ $\frac{१}{८}$ $\frac{१}{३}$ इनके अंशों को अंशों से और हरों को हरों से गुणा करने पर—$\frac{२\times१\times१}{१\times८\times३}=\frac{२}{२४}=\frac{१}{१२}=$ उत्तर ।

उपपत्तिः—अत्रालापोक्त्या कल्प्यते $\frac{अ}{क} = ख$, $\frac{ख \times ग}{न} = च$, $\frac{च \times व}{प} = म$, $\frac{म \times ट}{स} = छ$ इत्यादि।

$$\therefore \frac{च \times व \times ट}{न \cdot स} = \frac{ख \cdot ग \times व \cdot ट \cdot}{न \cdot स \cdot प \cdot} = \frac{अ \cdot ग \cdot व \cdot ट}{क \cdot प \cdot न \cdot स \cdot}$$

अत उपपन्नं सर्वम्।

अत्रोद्देशकः।

द्रम्मार्धत्रिलवद्वयस्य सुमते पादत्रयं यद्भवेत्
तत्पञ्चांशकषोडशांशचरणः संप्रार्थितेनार्थिने।
दत्तो येन वराटकाः कति कदर्येणार्पितास्तेन मे
ब्रूहि त्वं यदि वेत्सि वत्स गणिते जातिं प्रभागाभिधाम्॥ १॥

हे सुमते! किसी कदर्य (कृपण) ने एक भिक्षुक को याचना करने पर १ द्रम्म के आधे के द्विगुणित तृतीय भाग का जो त्रिगुणित चतुर्थांश होता है, उसके पञ्चमांश के षोडशांश का चतुर्थांश दिया, तो हे वत्स! यदि तुम प्रभागजाति गणित को जानते हो, तो बताओ कि कृपण ने कितनी कौड़ियाँ उस याचक को दीं।

न्यासः। $\frac{१}{१}$ $\frac{१}{२}$ $\frac{२}{३}$ $\frac{३}{४}$ $\frac{१}{५}$ $\frac{१}{१६}$ $\frac{१}{४}$।

सवर्णिते जातम् $\frac{६}{७६८०}$।

षड्भिरपवर्तिते जातम् $\frac{१}{१२८०}$। एको दत्तो वराटकः।

इति प्रभागजातिः।

उदाहरण—$\frac{१}{१}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{१६}$, $\frac{१}{४}$, इनका सूत्र के अनुसार सवर्णन करने से $\frac{१}{१} \times \frac{१}{२} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{१६} \times \frac{१}{४} = \frac{६}{७६८०} = \frac{१}{१२८०}$ द्रम्म। $\frac{१ \times १६}{१२८०}$ = पण, $\frac{१ \times १६ \times ४}{१२८०}$ = काकिणी, $\frac{१ \times १६ \times ४ \times २०}{१२८०} = \frac{१ \times १२८०}{१२८०}$ = वराटक १ = उत्तर १ कौड़ी।

अथ भागानुबन्धभागापवाहयोः करणसूत्रं सार्धवृत्तम्।

छेदघ्नरूपेषु लवा धनर्णमेकस्य भागा अधिकोनकाश्चेत्॥२॥

स्वांशाधिकोनः खलु यत्र तत्र भागानुबन्धे च लवापवाहे ।
तलस्थहारेण हरं निहन्यात् स्वांशाधिकोनेन तु तेन भागान् ॥३॥

चेत् एकस्य भागा अधिकोनकाः कर्तव्यास्तदा छेदरूपेषु कथाः सवर्णं कार्यम् । यत्र खलु स्वांशः अधिकोनः तत्र भागानुबन्धे लवापवाहे च तलस्थहारेण हरं निहन्यात्, एवं स्वांशाधिकोनेन तु तेन (हरेण) भागान् निहन्यात् ।

यदि किसी एक रूप का भाग अधिक हो या न्यून हो, अर्थात् किसी एक अङ्क का कोई भाग दूसरे अङ्क में जोड़ा या घटाया जाय, तो रूप को हर से गुणाकर अंश को धन, ऋण के अनुसार धन या ऋण करें । जैसे २ में $\frac{१}{४}$ जोड़ना है, तो रूप २ को हर ४ से गुणा कर १ अंश जोड़ दिया तो २ × ४ = ८, $\frac{८+१}{४} = \frac{९}{४}$ हुआ । घटाना रहता तो ८ में १ घटाकर $\frac{७}{४}$ होता । जिस भागानुबन्ध और भागापवाह में अपना ही कोई भाग किसी संख्या में जोड़ा या घटाया जाय, वहाँ नीचे के हर से दूसरे के हर को गुणा करें और अपने अंश को धन, ऋण के अनुसार अपने हर में धन या ऋण कर जो शेष बचे उससे दूसरे के अंश को गुणा करें तो सवर्णन होता है । जैसे $\frac{१}{४}$ में अपना $\frac{१}{३}$ जोड़ना है, तो नीचे के ३ हर से ऊपर वाले ४ हर को गुणा करने पर १२ हुआ । यहाँ धन करना है अतः ३ हर में १ अंश को जोड़कर ऊपर वाले अंश को गुणा किया तो ४ हुआ अतः $\frac{४}{१२} = \frac{१}{३}$ हुआ । यही उन दोनों का योगफल आया ।

उपपत्ति:—अथांशस्य योगेन राशौ भागानुबन्धस्तथा तद्वियोगेन भागापवाहो भवतीति ज्ञेयम् । तत्र कल्प्यते—$अ \pm \frac{व}{स} = \frac{अ.स \pm व}{स}$ एतेनोपपन्नं पूर्वार्धम् । यदि $\frac{अ}{व} \pm \frac{अ}{व} \cdot \frac{स}{प}$ इति कल्प्यते तदात्र समच्छेदादिकृते $\frac{अ.प}{व.प} \pm \frac{अ.स}{व.प} = \frac{अ(प \pm स)}{व.प}$ अत उपपन्नमुत्तरार्धमिति ।

अत्रोद्देशकः ।

साङ्घ्रि द्वयं त्रयं त्र्यङ्घ्रि कीदृग्ब्रूहि सवर्णितम् ।
जानास्यंशानुबन्धं चेत् तथा भागापवाहनम् ॥ १ ॥

हे मित्र ! भागानुबन्ध और भागापवाह यदि तुम जानते हो, तो २ में $\frac{१}{४}$ जोड़ने से और ३ में $\frac{१}{४}$ घटाने से क्या होगा ? बताओ ।

न्यासः २ १/४ । ३ १/४° । सवर्णिते जातम् ९/४ । ११/४ ।

उदाहरण—२ में १/४ जोड़ना है अतः सूत्र के अनुसार सवर्णन करने पर २ + १/४ = २/१ + १/४ = (८+१)/४ = ९/४ हुआ। ३ में १/४ घटाना है तो सवर्णन कर १ घटाने से ३ − १/४ = ३/१ − १/४ = (१२−१)/४ = ११/४ हुआ।

अत्रोद्देशकः।

अङ्घ्रिः स्वत्र्यंशयुक्तः स निजदलयुतः कीदृशः कीदृशौ द्वौ
त्र्यंशौ स्वाष्टांशहीनौ तदनु च रहितौ स्वैस्त्रिभिः सप्तभागैः।
अर्धं स्वाष्टांशहीनं नवभिरथ युतं सप्तमांशैः स्वकीयैः
कीदृक् स्याद् ब्रूहि वेत्सि त्वमिह यदि सखेऽशानुबन्धापवाहौ ॥ २ ॥

हे मित्र! यदि तुम भागानुबन्ध और भागापवाह जानते हो तो उसके अनुसार एक का चतुर्थांश १/४ में अपने तृतीयांश १/३ को जोड़ कर फिर उसमें उसी का आधा १/२ जोड़ने से क्या होगा? एवं दो की तिहाई २/३ में अपने अष्टमांश १/८ को घटाने से जो हो, उसमें अपने त्रिगुणित सप्तमांश ३/७ को घटाने पर शेष बताओ। तीसरा प्रश्न यह है कि आधे १/२ में अपने अष्टमांश १/८ को घटाने से जो हो, उसमें अपने नवगुणित सप्तमांश ९/७ को जोड़ने पर जो हो, वह कहो ॥ २ ॥

न्यासः। १/४ १/३ १/२
२/३ १/८° ३/७° सवर्णिते जातं क्रमेण १/२ १/३ १/१ ।
१/२ १/८° ९/७

इति जाति चतुष्टयम्।

उदाहरण—१/४, १/३, १/२ इन सबों को जोड़ना है अतः पहले १/४ में १/३ को सूत्र के अनुसार जोड़ा तो ४/१२ = १/३ हुआ। १/३ में १/२ को जोड़ा तो ३/६ = १/२ यह उत्तर हुआ।

दूसरे प्रश्न में केवल घटाव है, इसलिये २/३ में १/८ को पहले घटाने के लिए सूत्र के अनुसार हर को हर से गुणा किया तो ३ × ८ = २४ हुआ। यहाँ भागापवाह है, अतः दूसरे के हर (८) में ऊपर वाले (१) अंश को घटाया तो ७ हुआ, इससे दूसरे के अंश (२) को गुणा किया तो १४ हुआ। क्रम से

लिखने पर $\frac{१४}{२४} = \frac{७}{१२}$ हुआ। इसमें $\frac{३}{७}$ को उक्त रीति से घटाया तो $\frac{७}{१२} - \frac{३}{७} = \frac{७\times४}{८४} = \frac{२८}{८४} = \frac{४}{१२} = \frac{१}{३}$ यह उत्तर हुआ।

तीसरे प्रश्न में $\frac{१}{२}$ में $\frac{१}{८}$ को घटाना है, तो सूत्र के अनुसार $\frac{१}{२} - \frac{१}{८} = \frac{७}{१६}$ यह शेष बचा, अब $\frac{७}{१६}$ में $\frac{९}{७}$ को जोड़ना है, अतः उक्त रीति से जोड़ने पर $\frac{७}{१६} + \frac{९}{७} = \frac{१६\times७}{११२} = \frac{११२}{११२} = \frac{१}{१}$ यह उत्तर हुआ ॥ २ ॥

इति जातिचतुष्टयम् ।

अथ भिन्नसङ्कलितव्यवकलितयोः करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

योगोऽन्तरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः ॥

तुल्यहरांशकानां योगोऽन्तरं कार्यम् । अहारराशेः रूपं हरः कल्प्यः ।

तुल्य हर वाले अंशों का ही योग या अन्तर करना चाहिए। जिस राशि में हर न हो वहाँ हर की जगह १ कल्पना कर समच्छेद करना चाहिए।

उपपत्तिः—समानजातीयानामङ्कानामेव योगोऽन्तरं वा भवतीति नियमात् सूत्रोक्तं सर्वमुपपद्यते । हरस्थाने रूपकल्पनेन विकाराभावात्तथोक्तमिति ।

अत्रोद्देशकः ।

पञ्चांशपादत्रिलवार्धषष्ठानेकीकृतान् ब्रूहि सखे ममैतान् ।
एभिश्च भागैरथ वर्जितानां किं स्यात् त्रयाणां कथयाशु शेषम् ॥ १ ॥

हे मित्र ! $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{६}$ इनका योगफल बताओ और योगफल को ३ में घटा कर शेष कहो।

न्यासः । $\frac{१}{५}$ $\frac{१}{४}$ $\frac{१}{३}$ $\frac{१}{२}$ $\frac{१}{६}$ ।

ऐक्ये जातम् $\frac{२९}{२०}$ ।

अथैतैर्विवर्जितानां त्रयाणां शेषम् $\frac{३१}{२०}$ ।

इति भिन्नसङ्कलितव्यवकलिते ।

उदाहरण—$\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{६}$, इनका योग करना है अतः समच्छेद कर जोड़ने से—$\frac{१४४+१८०+२४०+३६०+१२०}{७२०} = \frac{१०४४}{७२०} = \frac{२९}{२०}$ = उत्तर।

अब $\frac{२९}{२०}$ को ३ में घटाया, तो $३ - \frac{२९}{२०} = \frac{६०-२९}{२०} = \frac{३१}{२०}$ = उत्तर।

इति भिन्नसंकलितव्यवकलिते ।

अथ भिन्नगुणने करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ॥४॥

विभिन्ने गुणने—भिन्नगुणनकर्मणि, अंशाहतिः, छेदवधेन भक्ता लब्धं गुणनफलं स्यादिति ॥ ४ ॥

भिन्न अङ्क के गुणन में अंश को अंश से गुणा कर उसमें हरों के घात से भाग देने पर गुणनफल होता है ॥ ४ ॥

उपपत्तिः—कल्प्यते गुण्यः $= \frac{अ}{क}$, गुणकः $= \frac{ग}{घ}$

$\therefore$ गुणनफलम् $=$ गुण्य $\times$ गुणक $= \frac{अ}{क} \times \frac{ग}{घ} = \frac{अ \cdot ग}{क \cdot घ}$ अत उपपन्नम् ॥४॥

अत्रोद्देशकः ।

सत्र्यंशरूपद्वितयेन निघ्नं ससप्तमांशद्वितयं भवेत् किम् ।
अर्धं त्रिभागेन हतं च विद्धि दक्षोऽसि भिन्ने गुणनाविधौ चेत् ॥१॥

हे मित्र ! यदि तुम भिन्नगुणन में समर्थ हो, तो तृतीयांश से युत दो (२ + $\frac{१}{३}$) से सप्तमांशसहित दो (२ + $\frac{१}{७}$) को एवं ($\frac{१}{२}$) को ($\frac{१}{३}$) से गुणा कर गुणनफल बताओ ।

न्यासः । २$\frac{१}{३}$, २$\frac{१}{७}$ । सवर्णिते जातम् $\frac{७}{३}$ $\frac{१५}{७}$ । गुणिते च जातम् $\frac{५}{१}$ ।
न्यासः । $\frac{१}{२}$ $\frac{१}{३}$ । गुणिते जातम् $\frac{१}{६}$ ।

इति भिन्नगुणनम् ।

उदाहरण—२ + $\frac{१}{३}$, २ + $\frac{१}{७}$ इन दोनों का सवर्णन करने से $\frac{७}{३}$ $\frac{१५}{७}$ हुये । अब सूत्र के अनुसार दोनों को गुणा करने पर $\frac{७}{३} \times \frac{१५}{७} = \frac{१०५}{२१}$ हुआ । यहाँ दोनों अंशों के घात १०५ में हरद्वय का घात २१ से भाग दिया तो गुणनफल $\frac{१०५}{२१} =$ ५ आया । अब $\frac{१}{२}$ को $\frac{१}{३}$ से गुणा किया तो गुणनफल $\frac{१}{२} \times \frac{१}{३} = \frac{१}{६}$ हुआ ।

इति भिन्नगुणनम् ।

अथ भिन्नभागहारे करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

छेदं लवं च परिवर्त्य हरस्य शेषः कार्योऽथ भागहरणे गुणनाविधिश्च ।

अथ भागहरणे हरस्य छेदं लवं च परिवर्त्य शेषः गुणनाविधिः कार्यः ॥

भिन्न भाग में भाजक के अंश और हर को उलटा लिख कर शेष क्रिया भिन्न गुणा की तरह करने से भागफल होता है। जैसे $\frac{१}{८}$ को $\frac{१}{४}$ से भाग देना है, तो भाजक $\frac{१}{४}$ को उलटा लिखने से $\frac{४}{१}$ हुआ, इससे $\frac{१}{८}$ को गुणा किया तो $\frac{१}{८} \times \frac{४}{१} = \frac{४}{८} = \frac{१}{२}$ यह भागफल हुआ।

उपपत्तिः—कल्प्यते—भाज्यः $= \frac{अ}{क}$ भाजकः $= \frac{ग}{घ}$ $\therefore$ अ = भाज्य × क, ग = भाजक × घ। एवं $\frac{अ}{ग} = \frac{भाज्य \times क}{भाजक \times घ} \therefore \frac{अ \times घ}{ग \times क} = \frac{भाज्य \times घ \times क}{भाजक \times घ \times क}$

$\frac{भाज्य}{भाजक} \therefore \frac{भाज्य}{भाजक} \quad \frac{अ \times घ}{ग \times क}$ अत उपपन्नम्।

अत्रोद्देशकः।

सत्र्यंशरूपद्वितयेन पञ्च त्र्यंशेन षष्ठं वद मे विभज्य।
दर्भीयगर्भाग्रसुतीक्ष्णबुद्धिश्चेदस्ति ते भिन्नहृतौ समर्था॥ १॥

हे मित्र! यदि तेरी बुद्धि भिन्न भाग की विधि में कुशाग्र की तरह तेज है, तो ५ को (२ + $\frac{१}{३}$) से और $\frac{१}{६}$ को $\frac{१}{३}$ से भाग देकर लब्धि बताओ।

न्यासः २ $\frac{१}{३}$, $\frac{५}{१}$ । $\frac{१}{३}$ $\frac{१}{६}$ । यथोक्तकरणेन जातम् $\frac{१५}{७}$ $\frac{१}{२}$ ।

इति भिन्नभागहारः।

उदाहरण—५ को (२ + $\frac{१}{३}$) से भाग देना है, अतः २ + $\frac{१}{३}$ को सवर्णन किया तो $\frac{७}{३}$ हुआ। अब सूत्र के अनुसार भाग देने पर ५ $\div \frac{७}{३} = \frac{५}{१} \times \frac{३}{७} = \frac{१५}{७}$ यह भागफल आया। इसी तरह $\frac{१}{६}$ को $\frac{१}{३}$ से भाग दिया तो $\frac{१}{६} \times \frac{३}{१} = \frac{३}{६} = \frac{१}{२}$ उत्तर हुआ।

अथ भिन्नवर्गादौ करणसूत्रं वृत्तार्धम्।

वर्गे कृती घनविधौ तु घनौ विधेयौ।
हारांशयोरथ पदे च पदप्रसिद्ध्यै॥ ५॥

भिन्नवर्गे हारांशयोः कृती विधेयौ, घनविधौ तु हारांशयोः घनौ विधेयौ। अथ पदप्रसिद्ध्यै हारांशयोः पदे विधेये॥

किसी भिन्न अङ्क का वर्ग या घन करना हो, तो हर और अंश दोनों का

वर्ग वा घन करें। यदि वर्गमूल या घनमूल लेना इष्ट हो, तो हर और अंश दोनों का अलग-अलग मूल निकालना चाहिये।

उपपत्ति:—कल्प्यते $\frac{अ}{क}$, अस्य वर्गः कर्तव्योऽस्ति तदा 'समद्विघातः कृतिरुच्यते' इत्यनेन $\left(\frac{अ}{क}\right)^2 = \frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = \frac{अ^2}{क^2}$ इति। घनकरणाय तु घन-परिभाषया $\left(\frac{अ}{क}\right)^3 = \frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} \times \frac{अ}{क} = \frac{अ^3}{क^3}$। एवं वर्गमूलादिकमप्युपपद्यते।

अत्रोद्देशकः।

सार्धत्रयाणां कथयाशु वर्गं वर्गात् ततो वर्गपदं च मित्र।
घनं च मूलं च घनात् ततोऽपि जानासि चेद्वर्गघनौ विभिन्नौ॥ १॥

हे मित्र! यदि तुम भिन्न संख्या के वर्ग और घन की रीति जानते हो, तो $३ + \frac{१}{२} = \frac{७}{२}$ का वर्ग और उस वर्ग का वर्गमूल एवं $\frac{७}{२}$ का घन और घन का घनमूल शीघ्र बताओ।

न्यासः $३\frac{१}{२}$। छेदघ्नरूपे कृते जातम् $\frac{७}{२}$।
अस्य वर्गः $\frac{४९}{४}$। मूलम् $\frac{७}{२}$। घनः $\frac{३४३}{८}$। अस्य मूलम् $\frac{७}{२}$।

इति भिन्नपरिकर्माष्टकम्।

उदाहरण—$\frac{७}{२}$ का वर्ग करना है, अतः सूत्रके अनुसार $\left(\frac{७}{२}\right)^2 = \frac{४९}{४}$ हुआ। $\frac{४९}{४}$ का वर्गमूल लिया, तो $\frac{७}{२}$ हुआ एवं $\frac{७}{२}$ का घन किया, तो $\frac{७}{२} \times \frac{७}{२} \times \frac{७}{२} = \frac{३४३}{८}$ हुआ। घनमूल लाने पर $\frac{७}{२}$ हुआ।

इति भिन्नपरिकर्माष्टकम्।

भिन्नपरिशिष्ट।

लघुतमसमापवर्त्य के द्वारा भिन्नाङ्कों की योगान्तरविधि।

भिन्नाङ्कों के हरों के लघुतम समापवर्त्य निकाल कर हर के स्थान में लिखें। बाद में अपने-अपने हर से उस लघुतम को भाग देकर अपनी-अपनी लब्धि से अपने-अपने अंश को गुणाकर अंश स्थान में लिखकर योग वा अन्तर करना चाहिए। जैसे $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{१०}$, $\frac{४}{१५}$, $\frac{३}{२०}$, इनको जोड़ना है। यहाँ ३, ५, १०, १५, २० का लघुतम समापवर्त्य निकालने पर ६० होता है। ६० को हर की जगह में लिखा। अब ६० में अपने २ हरों से भाग देने पर क्रम से २०, १२,

६, ४ और ३ लब्धियाँ हुईं। इनसे अपने २ अंशों को गुणा करने पर क्रम से २०, २४, १८, १६, ९ हुये। इनको अंशों के स्थान में लिखकर जोड़ा तो—
$\frac{२०+२४+१८+१६+९}{६०} = \frac{८७}{६०} = \frac{२९}{२०} = १\frac{९}{२०}$ = उत्तर।

इसी तरह अन्तर में पूर्वोक्त क्रिया करके घटाना चाहिये। जैसे $\frac{१५}{१} - \frac{१}{७} - \frac{३}{५} - \frac{२}{३}$ यहाँ हरों का लघुतम १०५ हुआ। अब उक्तरीति से—
$\frac{१५\times१०५-१\times१५-३\times२१-२\times३५}{१०५} = \frac{१५७५-१५-६३-७०}{१०५} = \frac{१५७५-१४८}{१०५}$
$= \frac{१४२७}{१०५} = १३\frac{६२}{१०५}$ = अन्तर।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

योग और अन्तर बताओ।

(१) $\frac{२}{३}+\frac{३}{४}+\frac{५}{६}+\frac{७}{८}$। (२) $५\frac{२}{३}+२\frac{१}{३}+३\frac{२}{५}+१\frac{७}{८}$। (३) $३३+८\frac{२}{३}+३\frac{५}{९}$। (४) $५\frac{२}{११}+\frac{३७८}{५}+\frac{८१५}{१३}$। (५) $८\frac{१}{१२}-७\frac{३}{१६}$। (६) $३९\frac{१०}{६३}-२८\frac{२०}{२१}$। (७) $१२\frac{१३}{२१}-२\frac{७}{२८}$। (८) $\frac{१७}{८८}-\frac{२}{७७}$। (९) $३\frac{१५}{५५}+४\frac{१०}{३३}-\frac{२५}{५६}$। (१०) $\frac{२}{३}-\frac{५}{७}+\frac{५}{४}$।

गुणा करो।

(१) $\frac{५}{१३}$ को $\frac{८}{११}$ से। (२) $४\frac{१५}{२२}$ को १८ से। (३) $३१\frac{९}{२३}$ को ४३ से। (४) $३१\frac{७२१}{८९३}$ को २१ से। (५) $\frac{१५}{२०}\times\frac{२५}{१३}\times\frac{१०}{४}$। (६) $\frac{४}{३}\times\frac{१२५}{४}\times\frac{१५}{११}$।

भागफल निकालो।

(१) $\frac{९}{५५}\div९$। (२) $\frac{८३}{१४३}\div६५$। (३) $२१५\frac{१}{४}\div७$। (४) $३२५\frac{२}{७}\div१५$। (५) $\frac{३४३}{५१२१}\div\frac{२४}{६५}$। (६) $\frac{२२५}{९६१}\div\frac{४५}{२५}$। (७) $\frac{४३}{२०५}\div\frac{२५}{५}$।

सरल करने की विधि।

जिस भिन्नाङ्क को सरल करना हो, उसके अंश और हर दोनों के उत्पादक निकाल कर जो टुकड़े हर और अंश दोनों में शामिल हों उनको छोड़कर अंश के बाकी टुकड़ों के गुणनफल को अंश की जगह में तथा हर के बाकी टुकड़ों के गुणनफल को हर की जगह लिखने से सरल मान होता है।

जैसे—$\frac{१००८००}{११५२००} = \frac{५\times२०१६०}{५\times२३०४०} = \frac{५\times५\times४०३२}{५\times५\times४६०८} = \frac{५\times५\times४\times१००८}{५\times५\times४\times११५२}$
$= \frac{५\times५\times४\times४\times२५२}{५\times५\times४\times४\times२८८} = \frac{५\times५\times४\times४\times४\times६३}{५\times५\times४\times४\times४\times७२} = \frac{५\times५\times४\times४\times४\times७\times९}{५\times५\times४\times४\times४\times८\times९}$
$= \frac{७}{८}$ = उत्तर।

विशेष :—यदि किसी पद में +, −, ×, ÷ और 'का' चिह्नों में से सभी या कुछ हों, तो सबसे पहले 'का' चिह्न की क्रिया होती है, उसके बाद क्रम से भाग, गुणा, योग और घटाव की क्रिया करनी चाहिये।

जैसे—(१) $१\frac{२}{११} \times २\frac{१}{२७} \div \frac{१}{५४} = \frac{१३}{११} \times \frac{५५}{२७} \div \frac{१}{५४} = \frac{१३}{११} \times \frac{५५}{२७} \times \frac{५४}{१}$

$= \frac{१३}{१} \times \frac{५}{१} \times \frac{२}{१} = \frac{१३ \times ५ \times २}{१ \times १ \times १} = \frac{१३०}{१} = १३०$ उत्तर।

(२) $\frac{३}{१३} \times \frac{८}{१५} \div \frac{७}{४५}$ का $\frac{५}{२१} - \frac{१}{१३}$

$= \frac{३}{१३} \times \frac{८}{१५} \div \frac{१}{२७} - \frac{१}{१३}$

$= \frac{३}{१३} \times \frac{८}{१५} \times \frac{२७}{१} - \frac{१}{१३}$

$= \frac{२१६}{६५} - \frac{१}{१३} = \frac{२१६ - ५}{६५} = \frac{२११}{६५} = ३\frac{१६}{६५}$ उत्तर।

(३) $\frac{१०}{४७} \times \frac{९४}{५०५} \div \frac{५}{१८८}$ का $\frac{३}{५} + \frac{८}{९}$

$= \frac{१०}{४७} \times \frac{९४}{५०५} \div \frac{३}{१८८} + \frac{८}{९}$

$= \frac{१०}{४७} \times \frac{९४}{५०५} \times \frac{१८८}{३} + \frac{८}{९}$

$= \frac{७५२}{३०३} + \frac{८}{९} = \frac{२२५६ + ८०८}{९०९} = \frac{३०६४}{९०९} = ३\frac{३३७}{९०९}$ उत्तर।

(४) $३ + \frac{१}{१९} \times \frac{१७१}{७२९} \div \frac{३६१}{१४५८}$ का $\frac{१३५}{१५२} - \frac{२}{१३३} + \frac{५}{७६}$

$= ३ + \frac{१}{१९} \times \frac{१७१}{७२९} \div \frac{३६१}{१४५८} \times \frac{१३५}{१५२} - \frac{२}{१३३} + \frac{५}{७६}$

$= ३ + \frac{१}{१९} \times \frac{१७१}{७२९} \times \frac{५४ \times ८}{१९ \times ५} - \frac{२}{१३३} + \frac{५}{७६}$

$= ३ + \frac{१}{१} \times \frac{१}{२७} \times \frac{२ \times ८}{१९ \times ५} - \frac{२}{१३३} + \frac{५}{७६}$

$= ३ + \frac{१ \times १ \times २ \times ८}{१ \times ३ \times १९ \times ५} - \frac{२}{१३३} + \frac{५}{७६}$

$= ३ + \frac{१६}{२८५} - \frac{२}{१३३} + \frac{५}{७६} = \frac{२३९४० + ४४८ - १२० + ५२५}{७९८०} = \frac{२४७९३}{७९८०}$

$= ३\frac{८५३}{७९८०}$ उत्तर।

(५) $२\frac{१}{२} \div \frac{१ - \frac{५}{६}}{\frac{१}{३} - \frac{१}{४}} + \frac{३}{४} \div \frac{१}{२} + \frac{१}{५}$

$= \frac{५}{२} \div \frac{\frac{१}{६}}{\frac{१}{१२}} + \frac{३}{४} \div \frac{१}{२} + \frac{१}{५}$

$= \frac{५}{२} \div \frac{१}{६} \times \frac{१२}{१} + \frac{३}{४} \div \frac{१}{२} + \frac{१}{५}$

$$= \frac{५}{२} \div \frac{२}{१} + \frac{३}{४} \div \frac{१}{३} + \frac{१}{५}$$
$$= \frac{५}{२} \times \frac{१}{२} + \frac{३}{४} \times \frac{३}{१} + \frac{१}{५}$$
$$= \frac{५}{४} + \frac{९}{४} + \frac{१}{५} = \frac{३५+४५+४}{२०} = \frac{७४}{२०}$$
$$= \frac{३७}{१०} = ३\frac{७}{१०} \text{ उत्तर}$$

अभ्यासार्थं प्रश्नाः—

सरल करो :—

(१) $३\frac{१}{५} \div ५\frac{१}{३}$ का $२\frac{१}{३}$

(२) $१\frac{१}{८}$ का $३\frac{१}{३} \div \frac{३}{४}$ का $२\frac{१}{२}$

(३) $१\frac{१}{३} \times २\frac{२}{७} \times ४\frac{१}{५} \div १\frac{१}{२}$ का $२\frac{१}{४}$

(४) $११\frac{१}{१९} \div \frac{३}{३८} \times \frac{५}{९१} \times \frac{२१}{३५} - \frac{१}{९५} + \frac{३}{५}$

(५) $\frac{१९}{४२} + \frac{८४}{९७१} \times \frac{३}{३८} \div \frac{५}{७६} - \frac{३}{५७}$

(६) $$\frac{५\frac{६}{७} - २\frac{२}{३} + ४\frac{१}{१४}}{३\frac{१}{३} + \dfrac{१ + \frac{४}{५}}{२ - \frac{५}{८}}}$$

(७) $$\frac{१\frac{७}{९} \times \frac{२७}{६४}}{१\frac{१}{१२} \times ९\frac{९}{११}} \div \frac{४\frac{४}{७} \times \frac{२१}{५६०}}{२\frac{५}{६} \div २\frac{२}{१५}}$$

(८) $$\frac{३\frac{१}{५} + \frac{७}{१५}}{२\frac{९}{१०}} + \frac{३ - \frac{७}{१०} \times \frac{८}{९१}}{\frac{१}{३}} - ५ + \frac{१}{२} \text{ का } \frac{४}{९}$$

कोष्ठों का प्रयोग :—

( ), { }, [ ], इन चिह्नों को क्रम से छोटा, मध्यम और बड़ा कोष्ठ कहते हैं। यदि किसी पद में ये तीनों कोष्ठ या इनमें से कोई दो हों, तो सबसे पहले छोटे कोष्ठ के भीतर की क्रिया होती है, उसके बाद मध्यम कोष्ठ की तथा अन्त में बड़े कोष्ठ की क्रिया होती है। इन कोष्ठों को तोड़ने के बाद कोष्ठ के बाहर की क्रिया होनी चाहिये।

यदि किसी संख्या और कोष्ठ के बीच में कोई चिह्न नहीं हो, तो वहाँ गुणा का चिह्न समझना चाहिये।

यथा ५ (१५ + २३), इसका मतलब ५ × (१५ + २३) है।

यदि कोष्ठ के पहले धन (+) चिह्न हो, तो कोष्ठ तोड़ने पर उसके भीतर की संख्याओं के चिह्न ज्यों के त्यों रह जाते हैं।

यथा—$२ + (११ - ९ + ३) = २ + ११ - ९ + ३$ ।

यदि कोष्ठ के पहले ऋण (−) चिह्न हो, तो कोष्ठ को तोड़ने पर उसके भीतर के धन और ऋण चिह्न क्रम से ऋण और धन में बदल जाते हैं।

यथा—$२५ - (४ - ३ + १७) = २५ - ४ + ३ - १७$ ।

उदाहरण—

(१) $२ + (३\frac{१}{२} - २\frac{१}{७}) = २ + (\frac{७}{२} - \frac{१५}{७}) = २ + (\frac{४९ - ३०}{१४})$

$= २ + (\frac{१९}{१४}) = २ + \frac{१९}{१४} = \frac{४७}{१४} = ३\frac{५}{१४}$ उत्तर ।

(२) $३ \div [\,२ + ३ \div \{४ + ५ \div (२ - \frac{१}{३})\}\,]$

$= ३ \div [\,२ + ३ \div \{४ + ५ \div \frac{५}{३}\}\,]$

$= ३ \div [\,२ + ३ \div \{४ + \frac{५ \times ३}{५}\}\,]$

$३ \div [२ + ३ \div \{४ + ३\}] = ३ \div [२ + ३ \div ७] = ३ \div [२ + \frac{३}{७}]$

$= ३ \div [\frac{१७}{७}] = ३ \div \frac{१७}{७} = \frac{३ \times ७}{१७} = \frac{२१}{१७} = १\frac{४}{१७}$ उत्तर ।

(३) $७ - [\frac{३}{४} + \{२\frac{१}{२} - (१\frac{१}{२} - \frac{१}{३})\}]$

$= ७ - [\frac{३}{४} + \{२\frac{१}{२} - (\frac{३}{२} - \frac{१}{३})\}] = ७ - [\frac{३}{४} + \{२\frac{१}{२} - (\frac{९ - २}{६})\}]$

$= ७ - [\frac{३}{४} + \{२\frac{१}{२} - \frac{७}{६}\}] = ७ - [\frac{३}{४} + \{\frac{५}{२} - \frac{७}{६}\}]$

$= ७ - [\frac{३}{४} + \{\frac{१५ - ७}{६}\}] = ७ - [\frac{३}{४} + \frac{८}{६}]$

$= ७ - [\frac{३}{४} + \frac{४}{३}] = ७ - [\frac{९ + १६}{१२}] = ७ - \frac{२५}{१२} = \frac{८४ - २५}{१२}$

$= \frac{५९}{१२} = ४\frac{११}{१२}$ उत्तर ।

(४) $६ + [४ - \frac{१}{८}\{७ - (३ \div २$ का $\frac{१}{३})\}]$

$= ६ + [४ - \frac{१}{८}\{७ - (३ \div \frac{२}{३})\}]$

$= ६ + [४ - \frac{१}{८}\{७ - (\frac{३ \times ३}{२})\}]$

$= ६ + [४ - \frac{१}{८}\{७ - \frac{९}{२}\}] = ६ + [४ - \frac{१}{८}\{\frac{५}{२}\}]$

$= ६ + [४ - \frac{१}{८} \times \frac{५}{२}]$

$= ६ + [४ - \frac{५}{१६}] = ६ + [\frac{५९}{१६}] = ६ + \frac{५९}{१६} = \frac{९६ + ५९}{१६}$

$= \frac{१५५}{१६} = ९\frac{११}{१६}$ उत्तर ।

(५) $\dfrac{३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३} \text{ का } १\frac{२}{७} - \frac{१}{७}}{(३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३}) \text{ का } (१\frac{२}{७} - \frac{१}{७})}$

$$= \frac{\frac{१३}{४} - \frac{७}{३} \text{ का } \frac{९}{७} - \frac{१}{७}}{\left(\frac{१३}{४} - \frac{७}{३}\right) \text{ का } \left(\frac{९}{७} - \frac{१}{७}\right)} = \frac{\frac{१३}{४} - \frac{३}{१} - \frac{१}{७}}{\left(\frac{३९-२८}{१२}\right) \text{ का } \left(\frac{८}{७}\right)}$$

$$= \frac{\frac{९१-८४-४}{२८}}{\frac{११}{१२} \times \frac{८}{७}}$$

$$= \frac{\frac{३}{२८}}{\frac{८८}{८४}} = \frac{३ \times ८४}{२८ \times ८८} = \frac{३ \times ३}{८८} = \frac{९}{८८} \text{ उत्तर ।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न :—

सरल करो :—

(१) $२ + \left(\frac{४९}{६०} - \frac{२३}{३०}\right)$, (२) $\left(५ - १\frac{१}{१३}\right) \times ३\frac{१}{१७}$

(३) $\left(२ - १\frac{१}{२१}\right) \times १०\frac{५}{६} \div १\frac{१}{१२}$

(४) $९ + \left\{२\frac{१}{३} + \left(\frac{४}{५} - \frac{१}{१०}\right)\right\}$

(५) $१५ - \left[\frac{२}{३} + \left\{१\frac{५}{६} + \left(\frac{४}{७} - \frac{१}{५}\right)\right\}\right]$

(६) $\frac{३\frac{१}{२} - २\frac{१}{६}}{\frac{१}{४} \text{ का } \left(\frac{१}{३} + \frac{२}{७}\right)} \div १३\frac{२}{६}$

(७) $\frac{१ + ५\frac{४}{९}\ \left(१ + ५\frac{४}{९}\right)}{१ + २\frac{१}{२}\ \left(१ + २\frac{१}{३}\right)} \text{ का } \frac{५}{२}$

(८) $\cfrac{१}{\frac{१}{२} + \frac{३}{७} + \cfrac{\frac{१}{२}}{५ - १}}$,　　(९) $६ + \cfrac{१}{६ + {}_{५ - \frac{१}{२}}}$

(१०) $\cfrac{३ + \cfrac{१}{३ - \frac{१}{३}}}{५ + \cfrac{३}{५ - \frac{१}{७}}} \times ७\frac{५}{६}$,　　(११) $\frac{\frac{३}{४} \div \frac{३}{२} \text{ का } \frac{६}{१३}}{\frac{३}{४} \div \frac{३}{४} \times \frac{१}{२}}$

(१२) $\left\{\cfrac{२}{३ - \cfrac{१}{१ - \frac{१}{३}}} - \frac{१}{२} \text{ का } \left(५ - \cfrac{२}{\frac{३}{२} - \frac{१}{६}}\right)\right\} \div \frac{\frac{१}{२} + \frac{५}{४}}{१\frac{१}{२}}$

(१३) $\frac{३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३} \times १\frac{२}{७} - \frac{१}{७}}{\left(३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३}\right)\left(१\frac{२}{७} - \frac{१}{७}\right)}$

(१४) $\dfrac{\dfrac{५\frac{१}{७} \times ४\frac{१}{२}\left(८\frac{१}{५} + ७\frac{३}{१०} - \frac{५}{१२}\right)}{\frac{१}{७}}}{\dfrac{\left\{\left(४\frac{१}{४} - २\frac{१}{८}\right) + \frac{५}{७}\right\} - \frac{१}{२}}{\frac{१}{२} + \frac{१}{४}}} + \frac{१}{५}\left(\frac{१}{३} + \frac{१}{२} - \frac{१}{४}\right)$

(१५) $\frac{३}{४} \div \dfrac{१ - \frac{५}{६}}{\frac{१}{३} - \frac{१}{४}} + \left(\frac{१}{२} + \frac{१}{४}\right) \div \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{५}\right)$

इति भिन्नपरिशिष्टम् ।

अथ दशमलवविधिः ।

१—जिस भिन्न के हर की जगह केवल १० का कोई घात हो, उसे दशमलव भिन्न कहते हैं ।

यथा—$\frac{७}{१०}$, $\frac{५२}{१००}$, $\frac{३४३}{१०००}$, $\frac{८२१३}{१००००}$, $\frac{२१३४५}{१०००००}$ आदि दशमलव भिन्न हैं। इनको हम दूसरी रीति से भी लिख सकते हैं। यथा—दशमलव भिन्न में हर की जगह १ के बाद जितने शून्य हों अंश में इकाई आदि के क्रम से उतनी जगह गिनकर दशमलव के चिह्न (·) लगा दें ।

यथा—$\frac{७}{१०}$, $\frac{५२}{१००}$, $\frac{३४३}{१०००}$ आदि में १ के ऊपर क्रम से एक, दो, तीन आदि शून्य हैं, अतः अंश में एक, दो, तीन आदि जगहों के बाद दशमलव चिह्न (·) रखने पर ·७, ·५२, ·३४३ आदि हुए। यदि हर की जगह में एक के ऊपर जितने शून्य हों उनसे अंश में अङ्क कम हों, तो इकाई की जगह से गिनने के बाद जितने अङ्क कम हों उतने शून्य पीछे में देकर उसके बाद दशमलव का चिह्न (·) रखना चाहिये। यथा—$\frac{३}{१०००}$ यहाँ हर में एक पर तीन शून्य हैं, परन्तु अंश में एक ही अङ्क है, अतः ३ के पीछे दो शून्य रखकर तब दशमलव का बिन्दु रखा ।

$\therefore \frac{३}{१०००} = ·००३$

$५९८·४३२ = ५०० + ९ + ८ + \frac{४}{१०} + \frac{३}{१००} + \frac{२}{१०००}$

$= ५९८ + \left(\frac{४}{१०} + \frac{३}{१००} + \frac{२}{१०००}\right) = ५९८ + \left(\frac{४०० + ३० + २}{१०००}\right)$

$= ५९८ + \frac{४३२}{१०००}$

इससे यह सिद्ध होता है कि भाज्य में स्थित अङ्कों की दायीं ओर इच्छानुसार शून्य रखने पर भी उसका स्वरूप नष्ट नहीं होता। पूर्ण-राशि

और भिन्न-राशि के बीच दशमलव का चिह्न रखा जाता है, यथा—$\frac{२५}{१०}$ = २·५, इङ्गलैण्ड में (२·५), अमेरिका में (२.५), जर्मनी में (२,५) इस तरह दशमलव के बिन्दु रखे जाते हैं। भारत में अंग्रेजी प्रणाली प्रचलित है।

दशमलव को सामान्य भिन्न में बदलना

जिस दशमलव को सामान्य भिन्न में बदलना हो, उस दशमलव में जितने अङ्क हों उनको अंश की जगह में लिखकर हर में १ के ऊपर उतने ही शून्य रखना चाहिये जितने अङ्क दशमलव में हों। यदि पूर्णाङ्क और दशमलव दोनों एक साथ हों, तो पूर्णाङ्क सहित दशमलव के सभी अङ्कों को अंश की जगह लिखकर, हर में पूर्वोक्त रीति से ही क्रिया करनी चाहिये।

यथा ·४३२ = $\frac{४३२}{१०००}$। ·८०३५ = $\frac{८०३५}{१००००}$ = $\frac{१६०७}{२०००}$

२· १३५६ = $\frac{२१३५६}{१००००}$ = $\frac{१०६७८}{५०००}$ = $\frac{५३३९}{२५००}$।

अभ्यासार्थ उदाहरण

निम्नलिखित दशमलव को भिन्न के रूप में बदलो।

(१) ·२४, (२) ·०५६३१, (३) ८·६५०२, (४) ६२·००३८६२७५१३, (५) ३६९२·१८५६, (६) १२·१०५, (७) २३·५२१८, (८) ३·०५, (९) २·०००८२७३५, (१०) ९·१७५३०८०६।

सामान्य या संयुक्त भिन्न को दशमलव में बदलना

जिस सामान्य भिन्न को दशमलव में बदलना हो, उसके अंश के आगे एक शून्य रखकर उसमें हर से भाग देकर लब्धि को दशमलव बिन्दु के बाद लिखें, शेष के ऊपर फिर एक शून्य रखकर उसे हर से भाग दें। भागफल को पहली लब्धि के आगे लिखें, इस तरह तब तक भाग देना चाहिये जब तक शेष कुछ नहीं रहे। ऐसा भिन्न कभी-कभी आवर्त्त दशमलव का रूप धारण कर लेता है, और कभी-कभी दशमलव के रूप में इसका अन्त ही नहीं होता है। संयुक्त भिन्न को दशमलव में परिवर्तित करने में सामान्य भिन्न की क्रिया से फर्क यही होता है कि संयुक्त भिन्न के पूर्णाङ्क को दशमलव बिन्दु से पहले लिखते हैं। शेष क्रिया दोनों में समान होती है।

जैसे— $\frac{२}{५} = \cdot४$

५)२०(
२०
××

$२\frac{३}{८} = २\cdot३७५$

८)३०(
२४
६०
५६
४०
४०
××

$\frac{१}{४} = \cdot२५$

४)१०(
८

$८५३\frac{१}{३} = ८५३\cdot३३३३३३$ इत्यादि

३)१०(
९
१०
९
१०
९
१०
९
१०
९
१०
९

अभ्यासार्थ प्रश्न

निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव में बदलो—

(१) $\frac{१}{१८}$, (२) $\frac{३}{७}$, (३) $२\frac{१}{८}$, (४) $८७\frac{३८}{१२५}$, (५) $\frac{१२}{१७}$, (६) $२\frac{७}{१६}$, (७) $५\frac{७}{२५}$, (८) $१\frac{३}{३२}$, (९) $\frac{५}{१२}$, (१०) $\frac{३}{५}$ ।

दशमलव का योग ।

१—दशमलव को एक दूसरे के नीचे इस तरह लिखना चाहिये कि सब दशमलव बिन्दु एक ही खड़ी पङ्क्ति में हों ।

जैसे—५·३२८६३
२·१४३२
८·२६७५
·७३२१
१६·४७१४३ उत्तर

दशमलव के घटाव में भी इसी तरह अङ्कों को रखकर अन्तर करना चाहिये।

यथा—१५·२५७९
३·१२५८
१२·१३२१ उत्तर

अभ्यासार्थ उदाहरण।

जोड़ो।

(१) ३२·१५६७०३ + ·३२५९८६ + ५४३·२१६८३।

(२) ८५३२१·३२५६ + ·२१९८७ + १२·३५१२३।

(३) १०२३००३·९३२१८६ + २३·१८७९ + २·१०३५०२१।

(४) ५०·०००३१ + २४३·१०५ + ·०७८० + ·६५४३२१।

(५) ८७५६·१९८३ + १·३२१८७ + ३२·३०८ + १२१·९६३५२।

घटाओ।

(६) ३४·२०९ को ५३·३२१ में।

(७) ८७३२·१५२३ को ९७३६५·३४६२१ में।

(८) २५६७·३८५४ को ८३२१७·२३५१ में।

(९) ·३२०५८०७ को १२३·७३२१ में।

(१०) ·४३२१८ को ३४·५३२ में।

दशमलव का गुणा

३—साधारण गुणा की तरह गुण्य और गुणक को गुणा कर दोनों में जितने अङ्क दशमलव में हों उनके योग के बराबर स्थान तक गुणनफल में इकाई की जगह से पीछे की ओर गिन कर दशमलव का चिह्न रखें।

यथा—गुण्य ·३२५४, गुणक ·२८६ ।

$$
\begin{array}{r}
\cdot३२५४ \\
\cdot२८६ \\
\hline
१९५२४ \\
२६०३२ \\
६५०८ \\
\hline
९३०६४४
\end{array}
$$

∴ गुणनफल = ·०९३०६४४ उत्तर ।

दशमलव का भाग ।

भाजक में जितने अङ्क दशमलव में हों, भाज्य के दशम लव चिह्न को उतने अङ्क आगे (दायीं ओर) खिसका (हटा) कर रखें। ऐसा करने से भाजक पूर्णाङ्क हो जाता है। इसके बाद भाज्य की पूर्णाङ्क संख्या में भाजक से भाग देकर जो लब्धि हो, उसके आगे दशमलव का चिह्न रखकर पूर्णाङ्क शेष के ऊपर दशमलव के अङ्कों को बारी-बारी से उतार कर उसमें भाजक से भाग देकर जो लब्धि हो उसे भागफल की जगह दशम बिन्दु के बाद लिखना चाहिये।

(१) यथा— ·४५३२ को ·२५ से भाग देना है। यहाँ भाजक में दो अङ्क दशमलव में हैं, अतः भाज्य के दशमलव चिह्न को दो अङ्क आगे हटा कर रखने पर ४५·३२ हुआ। अब भाजक २५ हो गया।

$$
\begin{array}{r|l}
२५) & ४५\cdot३२ \, (१\cdot८१२८ \\
 & २५ \\
\hline
 & २०३ \\
 & २०० \\
 & ३२ \\
 & २५ \\
\hline
 & ७० \\
 & ५० \\
 & २०० \\
 & २००
\end{array}
$$

अब भाज्य के पूर्णाङ्क ४५ में भाजक २५ से भाग देने पर लब्धि १ हुई शेष २० रहा, चूँकि भाज्य में पूर्णाङ्क की जगह अब कोई अंक नहीं है, अतः भागफल में १ के बाद दशमलव का चिह्न रखा। इसके बाद साधारण रीति से शेष-क्रिया करने से भागफल होता है।

(२) भाज्य ·३४५८१ भाजक ३२५ यहाँ भाजक में एक भी अङ्क दशमलव में नहीं है, अतः भाज्य में दशमलव का बिन्दु वैसे ही रह गया। भाज्य में पूर्णाङ्क की जगह कोई अङ्क नहीं रहने के कारण लब्धि में पूर्णाङ्क की जगह कोई अङ्क नहीं होगा, अर्थात् सभी अङ्क दशमलव चिह्न के बाद ही होंगे।

यहाँ भाज्य का पहला अङ्क ३ में ही ३२५ से भाग देना चाहिये। इस तरह करने पर पहली जगह दशमलव में शून्य लब्धि हुई, शेष ३ पर ४ उतारने पर ३४ हुआ। अब साधारण रीति से भाग देने पर—

३२५)·३४५८१(·००१०६४०३०७६९२ आदि हुए।
३४५
३२५
२०८१
१९५०
१३१०
१३००
१०००
९७५
२५००
२२७५
२२५०
१९५०
३०००
२९२५
७५०
६५०
१००

(३) भाज्य ८७९६२ भाजक ·१२५ यहाँ भाजक के दशमलव में तीन अङ्क हैं, और भाज्य में एक भी अङ्क दशमलव में नहीं है, अतः भाज्य के ऊपर तीन शून्य रखकर भाजक से भाग दिया।

यथा—·१२५) ८७९६२००० (७०३६९६ उत्तर
८७५
४६२
३७५
८७०
७५०
१२००
११२५
७५०
७५०
× ×

युक्ति $\frac{८७९६२}{·१२५} = \frac{८७९६२}{\frac{१२५}{१०००}} = \frac{८७९६२ \times १०००}{१२५}$

$= \frac{८७९६२०००}{१२५} = ७०३६९६$ उत्तर

(४) भाजक में जितने अङ्क दशमलव में हों, उनसे कम अङ्क भाज्य के दशमलव में हों, तो भाजक के दशमलव की संख्या भाज्य के दशमलव की संख्या से जितनी अधिक हो उतने शून्य भाज्य के ऊपर रखकर भाजक से भाग देना चाहिये।

यथा—भाज्य ४५६७·८२ भाजक ·४२०५ यहाँ भाज्य की दशमलव संख्या से भाजक की दशमलव संख्या २ अधिक है, अतः भाज्य के ऊपर दो शून्य रखने पर ४५६७८२०० हुआ। इसमें ४२०५ से भाग दिया तो १०८६२८२९९६ आदि हुए।

(५) दशमलव के भाज्य और भाजक को साधारण भिन्न में लाकर भाग देना चाहिये।

यथा— ·३२ को ·००४ से भाग देना है, तो यहाँ $·३२ = \frac{३२}{१००}$, और $·००४ = \frac{४}{१०००}$ अब $\frac{३२}{१००} \div \frac{४}{१०००} = \frac{३२}{१००} \times \frac{१०००}{४} = \frac{३२०}{४} = ८०$ उत्तर

दशमलव का वर्ग

(६) जिस दशमलव का वर्ग करना हो, उसका साधारण रीति से वर्ग करके, उस दशमलव भिन्न में जितने अङ्क दशमलव में हों, उससे दूने अङ्क इकाई की जगह से गिनकर वर्ग दशमलव में रहना चाहिये।

यथा ·२३ का वर्ग करना है, तो यहाँ साधारण रीति से २३ का वर्ग करने पर २३ × २३ = ५२९ हुआ, यहाँ ·२३ में दो अङ्क दशमलव में है, अतः इसके वर्ग में चार अङ्क दशमलव में रखने पर ·०५२९ हुआ ∴ ·२३ का वर्ग ·०५२९ हुआ।

दशमलव का घन

(७) साधारण रीति से घन निकाल कर जितने अङ्क उस संख्या में दशमलव में हों उससे त्रिगुणित अङ्क घन संख्या में इकाई की जगह से बाँई ओर गिनकर दशमलव का चिह्न रखना चाहिये। यदि उतने अङ्क घन में नहीं हों तो जितने कम हों उतने शून्य पीछे रखकर पूरा कर लेना चाहिये।

यथा ·२७ का घन करना है, तो यहाँ साधारण रीति से २७ का घन १९६८३ हुआ, यहाँ ·२७ में दो अङ्क दशमलव में हैं अतः घन में (२ × ३ =)६ अङ्क दशमलव में दायीं से बायीं ओर गिनकर रखने होंगे, लेकिन यहाँ घन में ५ हीं अङ्क है, अतः १९६८३ की बायीं ओर एक शून्य रख कर बाद में दशमलव चिह्न रखा तो ·०१९६८३ हुआ यही ·२७ का घन हुआ।

दशमलव का वर्गमूल

(८) जिस दशमलव संख्या का वर्गमूल निकालना हो उस दशमलव में अङ्कों की संख्या सम होनी चाहिये, यदि वह विषम हो तो उसमें दशमलव के अङ्कों के बाद एक शून्य रखकर उसे सम बना लेना चाहिये। इसके बाद साधारण रीति से वर्गमूल निकाल कर उस संख्या में जितने अङ्क दशमलव में हों, उससे आधे अङ्क वर्गमूल में दाँयी से बांयी ओर गिनकर दशमलव में रखना चाहिये।

यथा—८·८२०९ इसका वर्गमूल निकालने पर २९७ हुआ। यहाँ उक्त

संख्या में ४ अङ्क दशम लव में हैं, अतः वर्ग मूल में दो अङ्क दायीं से बाँयी ओर गिन कर दशम लव में रखने पर २·९७ हुआ।

अभ्यासार्थ प्रश्नः—

गुणा करो

(१) १२·२३५ को २·३ से।
(२) ९·७३२ को १·७९ से।
(३) ·५७३ को ·४६ से।
(४) ५·२००१३ को ·५२००१ से।
(५) ३·३३५७ को ·३३४८२ से।

भाग दो

(६) ·४४८७६ को ·२५ से।
(७) ·००००५ को ·०००००००१२५ से।
(८) ४३१·३७६ को ८१७० से।

पाँच दशमलव अंकों तक भागफल बताओ।

(९) २३५·४५६ को ·३२१४ से।
(१०) ६·३२ को ३४३ से।
(११) ३५६·४ को २७२ से।
(१२) ४·१२३ को २ से।
(१३) २१·४३२ को ९० से।
(१४) ८·७६५ को १३ से।
(१५) ४२५·७३ को २१ से।

वर्गमूल बताओ

(१६) ४·८४, १०·२४, ६·२५, ५६·२५, ८२·८१।

पाँच दशमलव अङ्क तक वर्गमूल निकालो।

(१७) ९६१·८७६५
(१८) ३६·२४५३१८
(१९) ६५६२·८३२६५
(२०) ·०३२१८७६

सरल करो

(२१) $\frac{५\cdot२\times\cdot०००२५}{\cdot००१७५\times२\cdot६}$
(२२) $\frac{\cdot०६४\times९\cdot५}{१\cdot५२}$
(२३) $\frac{\cdot५२५\times\cdot३४२}{\cdot००००२६२५\times\cdot००१०२६}$
(२४) $\frac{\cdot१२१\times\cdot८४}{\cdot००९९\times\cdot०४२}$
(२५) $\frac{\cdot२०४\times\cdot००१४३}{\cdot०००१७\times\cdot२०८}$

आवर्त दशमलव।

(१) कुछ सामान्य भिन्न जब दशमलव के रूप में लिखे जाते हैं, तो

उनमें भाग की क्रिया पूरी नहीं होती और भाग फल का अन्त नहीं होता। ऐसे दशमलव में कुछ अङ्क बार-बार आते हैं, अतः इन्हें आवर्त दशमलव कहते हैं, और वे अङ्क जो बार-बार आते हैं, आवर्त कहलाते हैं।

यथा $\frac{१}{३}$ इसको दशमलव के रूप में लाने पर ·३३३३३·········हुआ। यहाँ भाग फल का अन्त नहीं होता है और एक ही अङ्क (३) बार-बार आता है। अतः यह आवर्त दशमलव है।

इसी तरह $\frac{४}{९}\frac{२}{३}$ = ३·२३२३२३२३·············

और ९$\frac{९}{१४}$ = ९·६४२८५७१४२८५७१४······

(१०) आवर्त दशमलव को लिखने में आवर्त अङ्कों को एक बार लिख कर पहले और अन्तिम अङ्क के ऊपर एक-एक बिन्दु रख देते हैं।

यथा—·३३३३३·········को $\cdot\dot{३}$ से सूचित करते हैं।

३·२३२३२३·········को $३\cdot\dot{२}\dot{३}$ से सूचित करते हैं।

और ९·६४२८५७१४२८५७१···को $९\cdot६\dot{४}२८५७\dot{१}$ से सूचित करते हैं।

(क) जिस आवर्त दशमलव में, दशमलव चिह्न के बाद पहले ही अङ्क से आवर्त आरम्भ हो जाय, उसे शुद्ध आवर्त दशमलव कहते हैं।

यथा—$\cdot\dot{३}$ और $३\cdot\dot{२}\dot{३}$ से शुद्ध आवर्त दशमलव है।

(ख) आवर्त दशमलव में आवर्त से पहले एक या अधिक अङ्क हों, उसे मिश्र आवर्त दशमलव कहते हैं।

यथा—$९\cdot६\dot{४}२८५७\dot{१}$ यह मिश्र आवर्त दशमलव है।

आवर्त दशमलव को भिन्न के रूप में लाना

(११) जिस आवर्त दशमलव को भिन्न में लाना हो, उसमें जितने अङ्क पूर्णाङ्क, दशमलव तथा आवर्त में हों उनसे बनी संख्या में, आवर्त से पहले के अङ्कों से बनी संख्या को घटा कर अंश की जगह लिखें और जितने अङ्क आवर्त में हों, उतने नौ के ऊपर आवर्त और दशमलव के बिन्दुओं के बीच जितने अङ्क हों, उतने शून्य रखकर हर की जगह में लिखें। इस तरह के अंश और हर से बना हुआ भिन्न ही अभीष्ट भिन्न होगा।

(१) यथा—$\cdot\dot{७}$ को हमें भिन्न के रूप में लिखना है। तो यहाँ उक्त रीति के अनुसार $\frac{७-०}{९} = \frac{७}{९}$ उत्तर।

युक्ति:— $\cdot\dot{७} = \cdot७७७७७\cdots\cdots$

और $\cdot\dot{७} \times १० = ७\cdot७७७७७\ldots\ldots$

$\therefore\ \cdot\dot{७} \times १० - \cdot\dot{७} = ७\cdot७७७७७\ldots\ldots - \cdot७७७७७$

या $\cdot\dot{७}\,(१० - १) = ७$

या $\cdot\dot{७} \times ९ = ७$

या $\cdot\dot{७} = \frac{७}{९}$ उत्तर।

(२) $\cdot३\dot{५}\dot{४}$ इसको भिन्न के रूप में लाना है, तो उक्त रीति के अनुसार $\frac{३५४-३}{९९०} = \frac{३५१}{९९०} = \frac{११७}{३३०} = \frac{३९}{११०}$ उत्तर।

युक्ति:— $\cdot३\dot{५}\dot{४} - \cdot३५४५४५४\ldots\ldots$

$\therefore\ \cdot३\dot{५}\dot{४} \times १००० = \cdot३५४५४५४\ldots\ldots \times १०००$

और $\cdot३\dot{५}\dot{४} \times १० = \cdot३५४५४५४\ldots\ldots \times १०$

$\therefore\ \cdot३\dot{५}\dot{४}\,(१००० - १०) = ३५४\cdot५४५४५४\ldots\ldots - ३\cdot५४५४$

या $\cdot३\dot{५}\dot{४} \times ९९० = ३५४ - ३ = ३५१$

या $\cdot३\dot{५}\dot{४} = \frac{३५१}{९९०} = \frac{३९}{११०}$ उत्तर।

(३) $२६८\cdot३५२१\dot{५}४७९३\dot{२}$ इसको भिन्न में लाना है, तो उक्तरीति के अनुसार, अभीष्ट भिन्न $= \frac{२६८३५२१५४७९३२-२६८३५२१}{९९९९९०९००००}$

$= \frac{२६८३५१८८६४४११}{९९९९९९००००}$ उत्तर।

युक्ति:—$२६८\cdot३५२१\dot{५}४७९३\dot{२} = २६८\cdot३५२१५४७९३२५४७९३२\ldots$

$\therefore\ २६८\cdot३५२१\dot{५}४७९३\dot{२} \times १००००००००००$

$= २६८३५२१५४७९३२\cdot५४७९३२५४७९३२\cdots\cdots$

और $२६८\cdot३५२१\dot{५}४७९३\dot{२} \times १०००० =$

$२६८३५२१\cdot५४७९३२५४७९३२\cdots\cdots$

$\therefore\ २६८\cdot३५२१\dot{५}४७९३\dot{२} \times (\,१०००००००००० - १००००\,)$

$= २६८३५२१५४७९३२ - २६८३५२१$

या $२६८\cdot३५२१\dot{५}४७९३\dot{२} \times ९९९९९९००००$

$= २६८३५१८८६४४११$

$\therefore\ २६८\cdot३५२१\dot{५}४७९३\dot{२} = \frac{२६८३५१८८६४४११}{९९९९९९००००}$ उत्तर

आवर्त दशमलव का योग और अन्तर

(१२) दशमलवों को परस्पर सदृश करके साधारण रीति से योग और अन्तर करना चाहिये, लेकिन योग और अन्तर के अन्तिम अङ्क में, वह अङ्क, जो आवर्त के प्रथम खड़ी पङ्क्ति के अङ्कों से हाथ लगा हो, क्रम से जोड़ना और घटाना चाहिये।

(१) यथा—$२·\dot{३}५४\dot{२}$, $२३·८६\dot{४}\dot{७}$ इनको जोड़ना है।

यहाँ दशमलवों को आपस में सदृश करने पर—

$$\left.\begin{aligned} २·\dot{३}५४\dot{२} &= २·३५\dot{४}२३\dot{५} \\ \text{और } २३·८६\dot{४}\dot{७} &= \underline{२३·८६\dot{४}७४\dot{७}} \end{aligned}\right\} \text{हुआ}^{*}$$

दोनों को जोड़ने पर $२६·२१८९८\dot{२}$

यहाँ आवर्त की प्रथम खड़ी पङ्क्ति के अङ्कों का योग = ४ + ४ = ८ है अतः यहाँ हाथ में कुछ नहीं रहने के कारण योगफल में कुछ नहीं जोड़ा गया।

∴ अभीष्ट योग = $२६·२१८९८\dot{२}$ उत्तर।

(२) $९·५४\dot{३}$ और $·६\dot{२}\dot{५}$ को जोड़ना है, तो

$$\begin{aligned} ९·५४\dot{३} &= ९·५४\dot{३}\dot{३} \\ ·६\dot{२}\dot{५} &= \underline{·६\dot{२}\dot{५}} \\ & \quad १०·१६८५ \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

(३) $८·३\dot{१}$, $·\dot{६}$ और $·००\dot{२}$ इनको जोड़ना है, तो

$$\begin{aligned} ८·३\dot{१} &= ८·३१\dot{१} \\ ·\dot{६} &= ·६६\dot{६} \\ \text{और } ·००\dot{२} &= \underline{·००\dot{२}} \\ & \quad ८·९७\dot{९} = ८·९८ \end{aligned}$$

क्योंकि आवर्त में ९ रहने पर पिछले अङ्क में एक युत हो जाता है।

---

* सभी संख्याओं में अनावर्त में बराबर अङ्क रहना चाहिये, और आवर्त में सभी आवर्तों के लघुतम के बराबर अङ्क रहना चाहिये। यहाँ पहले उदाहरण में आवर्त में क्रम से चार और दो अङ्क हैं, अतः जोड़ने के समय आवर्त में चार और दो के लघुतम चार के बराबर अङ्क रखे गये हैं। अनावर्त में एक में दो अङ्क हैं, अतः दूसरे में भी दो अङ्क अनावर्त में रखे गये हैं।

(४) $३\cdot\dot{४}६७\dot{९}$ में $\cdot००\dot{३}२\dot{४}$ को घटाओ ।

$$३\cdot\dot{४}६७\dot{९} = ३\cdot४६\dot{७}९४६७९४६७९४\dot{६}$$
$$\cdot००\dot{३}२\dot{४} = \underline{\cdot००\dot{३}२४३२४३२४३२\dot{४}}$$
$$३\cdot४६\dot{४}७०३५५१४३६२\dot{२} \text{ उत्तर ।}$$

(५) $४\cdot५४\dot{७}$ में $\cdot२\dot{३}८\dot{६}$ को घटाओ ।

यहाँ सदृश करने से—

$$४\cdot५४\dot{७} = ४\cdot५४७७\dot{७}$$
$$\cdot२\dot{३}८\dot{६} = \underline{\cdot२३८६\dot{३}}$$
$$\text{अन्तर} \quad ४\cdot३०\dot{९}१\dot{४}$$

यहाँ आवर्त की प्रथम खड़ी पङ्क्ति में हाथ का १ अन्तर के अन्तिम अङ्क ४ में घटाने से ।

$$४\cdot३०\dot{९}१\dot{४}$$
$$\underline{१}$$
$$४\cdot३०\dot{९}१\dot{३} \text{ उत्तर हुआ ।}$$

आवर्त दशमलव का गुणा और भाग

(१३) दशमलवों को सामान्य भिन्न के रूप में लाकर सामान्य भिन्न के अनुसार गुणा और भाग की क्रिया करके उसे फिर दशमलव के रूप में कर लेना चाहिये । यदि भाज्य और भाजक दोनों आवर्त दशमलव हों, तो पहले उन्हें सदृश करके तब सामान्य भिन्न के रूप में लाकर भाग देना चाहिये ।

(१) यथा—$\cdot\dot{०}\dot{७}$ को $६\cdot\dot{१}$ से गुणा करना है, तो उन्हें साधारण भिन्न में लाने से ।

$\cdot\dot{०}\dot{७} = \frac{७}{९९}$ गुण्य,

और $६\cdot\dot{१} = \frac{६१-६}{९} = \frac{५५}{९}$ गुणक

$\therefore$ गुणनफल $= \frac{७}{९९} \times \frac{५५}{९} = \frac{७\times५}{९\times९} = \frac{३५}{९९}$

$= \cdot\dot{३}\dot{५}$ उत्तर

(२) भाज्य $३\cdot\dot{५}\dot{६}$ भाजक $१\cdot\dot{७}\dot{८}$

यहाँ $३\cdot\dot{५}\dot{६} = \frac{३५६-३}{९९} = \frac{३५३}{९९}$

$= १\cdot\dot{७}\dot{८} = \frac{१७८-१}{९९} = \frac{१७७}{९९}$

$\therefore \dfrac{\text{भाज्य}}{\text{भाजक}} = \dfrac{३५३}{९९} \div \dfrac{१७७}{९९} = \dfrac{३५३}{९९} \times \dfrac{९९}{१७७} = \dfrac{३५३}{१७७} = १\cdot९९४३\cdots$

(३) भाज्य $\cdot\dot{८}$ भाजक $\cdot२५$

यहाँ $\cdot\dot{८} = \frac{८}{९}$ और $\cdot२५ = \frac{२५}{१००}$

$\therefore \cdot\dot{८} \div \cdot२५ = \frac{८}{९} \div \frac{२५}{१००} = \frac{८}{९} \times \frac{१००}{२५} \cdot \frac{३२}{९} = ३\cdot\dot{५}$ उत्तर ।

(४) भाज्य $\cdot३\dot{४}५\dot{६}$ भाजक $\cdot२२\dot{७}\dot{६}$

यहाँ भाज्य और भाजक को सदृश करने पर

$\left.\begin{array}{l} \text{भाज्य} = \cdot३४\dot{५}६४५६\dot{४} \\ \text{भाजक} = \cdot२२\dot{७}६७६७\dot{६} \end{array}\right\}$ हुये

अब दोनों को भिन्न में लाने पर

$\text{भाज्य} = \dfrac{३४५६४५६४ - ३४}{९९९९९९००} = \dfrac{३४५६४५३०}{९९९९९९००}$

$\text{भाजक} = \dfrac{२२७६७६७६ - २२}{९९९९९९००} = \dfrac{२२७६७६५४}{९९९९९९००}$

$\therefore \dfrac{\text{भाज्य}}{\text{भाजक}} = \dfrac{३४५६४५३०}{९९९९९९००} \div \dfrac{२२७६७६५४}{९९९९९९००}$

$= \dfrac{३४५६४५३०}{९९९९९९००} \times \dfrac{९९९९९९००}{२२७६७६५४}$

$= \dfrac{३४५६४५३०}{२२७६७६५४} = \dfrac{१७२८२२६५}{११३८३८२७} = १\cdot५१८१४१$ उत्तर

अभ्यासार्थं प्रश्नाः—

(१) $५\cdot२\dot{१}८\dot{३} + ४१\cdot००६\dot{७}\dot{५} + \cdot२७४\dot{१}$

(२) $८\cdot६\dot{३}८\dot{२} - \cdot१\dot{७}२४\dot{३}$

(३) $२\cdot५१\dot{६}\dot{२} \times ३\cdot८\dot{७}२\dot{१}$

(४) $८\cdot३\dot{५}७२\dot{१} \div २\cdot४\dot{५}\dot{३}$

(५) $२५२\cdot६२\dot{३}\dot{५} \div २१\cdot३१\dot{६}\dot{२}$

मिश्र प्रकरण

(१) अमिश्र राशि वह है, जो एक ही इकाई द्वारा प्रकट की जाय, जैसे ३ रुपये अमिश्र राशि है । एक से अधिक इकाइयों द्वारा प्रकट की जाने वाली राशि मिश्र राशि कहलाती है, यथा—३ रु० ७ आ० ६ पा० यह मिश्र राशि है । मिश्र राशि की इकाइयाँ एक दूसरी से सम्बन्धित रहती हैं, अतः प्रयोजन होने पर हम एक इकाई को दूसरी में परिवर्तित कर सकते हैं ।

(२) मिश्र योग

रु०	आ०	पा०	
३	१३	५	इनको जोड़ना है।
८	७	२	
१३	१०	७	
२५ रु०	१५ आ०	२ पा०	

यहाँ पाइयों को जोड़ने पर १४ पा० हुआ, चूँकि १२ पाई का १ आना होता है, अतः १४ पा० का १ आना २ पा० हुआ। २ पाई को पाई की जगह में लिखा, और १ आना को आने की जगह में रख कर सबों को जोड़ने से ३१ आने हुये। इसमें १६ से भाग देने पर लब्धि १ रु० और शेष १५ आने हुये। १५ आने को आने की जगह में लिखा, और लब्धि १ रु० को रुपये की जगह में जोड़ने से २५ रु० हुए।

अतः सबों का योग २५ रु० १५ आ० २ पा० उत्तर।

मिश्र घटाव

(३) मिश्र घटाव में भी योग की ही तरह सजातीय इकाइयों को सजातीय इकाई के नीचे लिखकर साधारण घटाव की तरह घटाना चाहिये।

यथा— १५ रु० ११ आ० ८ पा० में १३ रु० १४ आ० १० पा० को घटाना है, तो उक्तरीति से न्यास करने पर—

	रु०	आ०	पा०	
	१५	११	८	हुआ
	१३	१४	१०	
अन्तर	१ रु०	१२ आ०	१० पा०	उत्तर।

यहाँ ८ पा० में १० पा० नहीं घटता, अतः १ आना (१२ पा०) पीछे से लेने पर (१२ + ८) २० पा० में १० पा० घटाया, तो शेष १० पा० रहा, इसको पा० की जगह में उत्तर में लिखा। आने की जगह १० आ० रहा, जिसमें १४ आ० नहीं घटता है, अतः पीछे से १ रु० (याने) १६ आने लिया तो (१६ + १०) २६ आने हुये, इसमें १४ आने घटाकर १२ आने,

उत्तर में आने की जगह लिखा। रुपये की जगह १५ में से १ चले आने के बाद १४ रहा, इसमें १३ रु० घटाने पर १ रु० उत्तर में रुपये की जगह लिखा। इस तरह लिखने से १ रु० १२ आ० १० पा० उत्तर हुआ।

मिश्र गुणा

(४) ११ पौ० १३ शि० ९ पें० को १३ से गुणा करना है, तो यहाँ गुणा की तरह गुण्य और गुणक को न्यास करने पर—

	पौ०	शि०	पे०	
गुण्य =	११	१३	९	हुआ
गुणक			१३	
	१५१ पौ०	१८ शि०	९ पे०	उत्तर

९ को १३ से गुणा करने पर ११७ पे० = ११७÷१२ = ९ शि० + ९ पे० ९ पे० को उत्तर में पे० की जगह लिखा, और ९ शि० को हाथ में रखा, फिर १३ शि० को १३ से गुणा करने पर १६९ शि० इसमें हाथ के ९ शि० जोड़ने पर १७८ ÷ २० = ८ पौ० + १८ शिलिङ्ग हुआ। १८ शि० को उत्तर में शिलिङ्ग की जगह लिखा और ८ पौ० को हाथ लगाया। फिर ११ पौ० को १३ से गुणा करने पर १४३ पौ० हुआ, इसमें हाथ का ८ पौ० जोड़ने से १४३ + ८ = १५१ पौ० को उत्तर में पौण्ड की जगह लिखा इस तरह लिखने पर १५१ पौ० १८ शि० ९ पें० उत्तर हुआ।

मिश्र भाग

(५) १४४ रु० ७ आ० २ पा० को १४ से भाग देना है तो, यहाँ भाग की तरह न्यास करने पर निम्नलिखित रूप हुआ।

१४) १४४ रु० ७ आ० २ पा० (१० रु० ५ आ० १ पा०

१४४ रु० में १४ से भाग देने पर लब्धि १० रु० को उत्तर में लिखा शेष ४ रुपये को १६ से गुणा करने से ६४ आ० हुये। इसमें भाज्य का ७ आ० जोड़ने से ७१ आ० हुये। ७१ आने में १४ से भाग देने पर लब्धि ५ आ०

हुये। शेष १ आ० को १२ से गुणा कर गुणन फल १२ में २ पा० जोड़ने पर १४ पा० हुये। इसमें भाजक १४ से भाग देने पर १ पा० लब्धि हुआ।

इस तरह लिखने पर १० रु० ५ आ० १ पा० उत्तर हुआ।

(६) भाग करने के बाद यदि सबसे छोटी इकाई वाली संख्या का कुछ शेष रह जाय, और वह शेष यदि भाजक के आधे से छोटा हो, तो उसे छोड़ देना चाहिये। यदि शेष भाजक के आधे से अधिक हो, तो लब्धि में सबसे छोटी इकाई वाली संख्या में १ जोड़ देने पर वास्तव लब्धि होती है। यथा—

६३ पौ० ७ शि० ११ पें० में ७ से भाग देना है, तो उक्तरीति से भाग देने पर लब्धि ९ पौ० १ शि० १ पें० और शेष ४ पे० रहा। यहाँ शेष ४, भाजक ७ के आधे से अधिक है, अतः लब्धि में पेंश की जगह १ जोड़ने से ९ पौ० १ शि० २ पें० वास्तव लब्धि हुई। इति।

अभ्यासार्थ प्रश्न—

(१) १५ निष्क, १३ द्रम्म, ११ पण, ३ काकिणी, ५ वराटक में १२१ निष्क, ८ द्रम्म, ९ पण, २ काकिणी, ११ वराटक को जोड़ो।

(२) १५२५ मील ११२३ गज २ फीट ११ इञ्च में १२१ मी० ८२२ ग० २ फी० ५ इञ्च को जोड़ो।

(३) ३१३ टन १९ हण्डर ३ क्वार्टर २७ पौण्ड में ३४२ टन ५ हण्डर २ क्वार्टर १३ पौण्ड को जोड़ो।

(४) ४१ म० ३८ से० १२ छ० में ८५१ म० २९ से० १५ छ० को जोड़ो।

इनका अन्तर बताओ

	बीघा	कट्ठा	धूर	कनवाँ	कनई
(५)					
	८५१	५	६	१३	११
	५३	८	९	१५	१२

	समकोण	अंश	मिनट	सेकेण्ड
(६)				
	८१	८३	५२	२१
	७३	८५	५८	२३

(७)	दिन	घण्टा	मिनट	सेकेण्ड
	३६४	२३	४३	१८
	०	५	३८	२३
(८)	गैलन	क्वार्ट	पाइन्ट	जिल
	१०	२	१	२
	५	४	०	१

गुणा करो

(९) ४० मील ६ फर्लाङ्ग २१३ गज २ फीट ११ इञ्च को २१ से।

(१०) १५ अंश ३१ कला ५८ विकला १३ प्र० विकला को ३६० से।

(११) २२ पौ० १८ शि० ९ पें० को ३३ से।

(१२) ५२५ रु० १३ आ० ११ पा० को १२१ से।

भाग दो

(१३) १३४० गैलन ३ क्वार्ट ५ पाइन्ट को ३०० से।

(१४) २७ पौ० ६ शि० २ पें० को ४९ से।

(१५) ३०० मन २० सेर ५ छटाँक को ८५ से।

(१६) ८१ रु० ८ आ० ११ पा० को ९ से।

(१७) किसी मनुष्य का वार्षिक आय १०००००० रु० हैं, यदि उसको प्रति रुपये को दर से ३ पैसे इनकम टैक्स देना पड़े, तो वार्षिक आय में कितनी कमी होगी।

(१८) ५५२५ रु० १२ आ० राम और श्याम में इस तरह बाँटों कि राम को श्याम से ५ गुना मिले।

(१९) एक मनुष्य के मासिक आय ६० रु० १२ आ० है, और वह प्रति दो मास में उस आय का चौथा भाग बचाता है, तो वह ३० मास में जितना खर्च करता है, उतना बचाने में उसको कितना समय लगेगा।

(२०) एक मनुष्य ने २० घोड़े और २० भेंड़े मोल लिया, प्रत्येक घोड़े का

मूल्य प्रत्येक भेंड़ के मूल्य से ५० गुना है। यदि १ भेंड़ का मूल्य १२ रु० १० आ० है, तो उस मनुष्य को कितना मूल्य देना पड़ा।

(२१) किसी आदमी ने कुछ चाय खरीदी जिसमें ७३ सेर नष्ट हो गई बाकी को उसने ४ शि० ११ पें० प्रति सेर की दर से ४१ पौ० ८ शि० में बेंच दिया, तो उसने कुल कितनी चाय खरीदी थी।

व्यवहार गणित।

(१) जिस गणित का व्यवहार में बहुधा प्रयोजन होता है, उसे व्यवहार गणित कहते हैं।

व्यवहार गणित दो प्रकार के होते हैं।

(क) जब किसी दी हुई दर से किसी अमिश्र राशि का मूल्य निकालना होता है, तो उसे सरल व्यवहार गणित कहते हैं।

(ख) यदि दी हुई दर और वह संख्या (राशि) जिसका मूल्य निकालना है, दोनों मिश्र राशि हों, तो उसे मिश्र व्यवहार गणित कहते हैं।

(२) व्यवहार गणित का आधार किसी संख्या का अशेष भाजक या समानांश है। अशेष भाजक का अर्थ नीचे के उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

१ आना = १ रु० का $\frac{१}{१६}$
२ आने = १ रु० का $\frac{१}{८}$
४ आने = १ रु० का $\frac{१}{४}$
८ आने = १ रु० का $\frac{१}{२}$

यहाँ सभी भिन्नों के अंश १ हैं, अतः १ आ०, २ आ०, ४ आ० और ८ आ० प्रत्येक १ रु० का अशेष भाजक या समानांश है।

या, ५० नये पैसे = १ रु० का $\frac{१}{२}$
२५ " " = १ रु० का $\frac{१}{४}$
२० " " = १ रु० का $\frac{१}{५}$

१० नये पैसे	=	१ रु० का	$\frac{१}{१०}$
५ „ „	=	१ रु० का	$\frac{१}{२०}$
२ „ „	=	१ रु० का	$\frac{१}{५०}$
१ „ „	=	१ रु० का	$\frac{१}{१००}$

उदाहरण—

(१) ७ आ० ३ पा० प्रति वस्तु की दर से ९३८५१ वस्तु का दाम निकालना है।

	रु०	आ०	पा०	
	९३८५१	०	०	प्रति वस्तु १ रु० की दर से
४ आ० = १ रु० का $\frac{१}{४}$	२३४६२	१२	०	„ „ ४ आ० „ „
२ आ० = ४ आ० का $\frac{१}{२}$	११७३१	६	०	„ „ २ आ० „ „
१ आ० = २ आ० का $\frac{१}{२}$	५८६५	११	०	„ „ १ आ० „ „
३ पा० = १ आ० का $\frac{१}{४}$	१४६६	६	९	„ „ ३ पा० „ „

४२५२६ रु० ३ आ० ९ पा०, ७ आ० ३ पा० की दर से

(२) ६ पौ० १२ शि० ५ पें० प्रति टन की दर से २५१३१२ टन का दाम बताओ।

	पौ०	शि०	पें०	
	२५१३१२	०	०	प्रति टन १ पौ० की दर से
			६	
	१५०७८७२	०	०	„ „ ६ पौ० „ „
१० शि० = १ पौ० का $\frac{१}{२}$	७५३९३६	०	०	„ „ १० शि० „ „
२ शि० = १० शि० का $\frac{१}{५}$	१५०७८७	४	०	„ „ २ शि० „ „
४ पें० = २ शि० का $\frac{१}{६}$	२५१३१	४	०	„ „ ४ पें० „ „
१ पें = ४ पें० का $\frac{१}{४}$	६२८२	१६	०	„ „ १ पें० „ „

२४४४००९ पौ० ४ शि० ० पें०, प्रति टन ६ पौ० १२ शि० ५ पें० की दर से

(३) १२ मन १७ सेर ८ छटाँक, का दाम प्रति मन ३ रु० ७ आ० ४ पा० की दर से बताओ।

	रु०	आ०	पा०	
	३	७	४	१ मन का दाम
			३	
	१०	६	०	३ मन का दाम
	४१	८	०	१२ मन का दाम
१० सेर = १ म० का $\frac{1}{4}$	०	१३	१०	१० सेर " "
५ सेर = १० से० का $\frac{1}{2}$	०	६	११	५ सेर " "
२ सेर ८ छ० = ५ सेर का $\frac{1}{2}$	०	३	५$\frac{1}{2}$	२ से० ८ छ० का दाम

४२ रु० १५ आ० २$\frac{1}{2}$ पा०, १२ मन १७ सेर ८ छटाँक का दाम

(४) २१ टन १० हण्डर ३ क्वार्टर १४ पौ० का दाम, प्रति टन २१ पौ० ८ शि० ६ पें० की दर से निकालो।

	पौ०	शि०	पें०	
	२१	८	६	१ टन का दाम
			७	
	१४९	१९	६	७ टन " "
			३	
	४४९	१८	६	२१ टन " "
१० हण्डर = १ टन का $\frac{1}{2}$	१०	१४	३	१० हण्डर " "
२ क्वार्टर = १० ह० का $\frac{1}{20}$	००	१०	८$\frac{11}{20}$	२ क्वार्टर " "
१ क्वार्टर = २ क्वा० का $\frac{1}{2}$	००	५	४$\frac{11}{40}$	१ क्वार्टर " "
१४ पौ० = १ क्वा० का $\frac{1}{2}$	००	२	८$\frac{11}{80}$	१४ पौ० " "

४६१ पौ० ११ शि० ५$\frac{77}{80}$ पें० २१ टन १० ह० ३ क्वार्टर १४ पौ० का दाम

निम्न लिखित प्रश्नों के उत्तर व्यवहार गणित की रीति से बताओ।

(१) ३ मन २७ सेर ८ छ० का, १० रु० ५ आ० ८ पा० मन की दर से।

(२) १ मन १७ सेर १० छ० का, ७ आ० ६ पा० सेर की दर से।

(३) ९ मन १७½ सेर का, ४ रु० १० आ० ८ पा० मन की दर से।

(४) ३ मन ३७ सेर १२ छ० का, ७ शि० ६ पेंस की दर से।

(५) ७ बोरे मैदा का, जो प्रति बोरे में ३ मन १५ सेर है, ७ रु० १० आ० मन की दर से।

(६) ६ टन ३ हण्डर २ का० २४ पौ० का, १७ शि० ७ पेंस हण्डर की दर से।

(७) २५७ वस्तुओं का मोल बताओ जब कि १० उनमें से ३ रु० ९ आ० ४ पा० की हो।

इति व्यवहार गणितम्।

अथ शून्यपरिकर्मसु करणसूत्रमार्याद्वयम्।

योगे खं क्षेपसमं, वर्गादौ खं, खभाजितो राशिः।
खहरः स्यात्, खगुणः खं, खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ॥१॥
शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः।
अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितश्च युतः ॥२॥

खं (शून्यं प्रति) योगे क्षेपसमं स्यात्। खस्य वर्गादौ खं स्यात्। खभाजितः राशिः खहरः स्यात्। खगुणः राशिः खं भवेत्। शेषविधौ खगुणः चिन्त्यः। शून्ये गुणके जातेचेत् खं हारः स्यात् तदा राशिः पुनः अविकृत एव ज्ञेयः। तथैव खेन ऊनितः युतश्च राशिः अविकृतः एव ज्ञेयः ॥ २ ॥

शून्य में किसी संख्या को जोड़ने पर योगफल उस संख्या के तुल्य ही होता है। शून्य के वर्गादि शून्य ही होते हैं। किसी राशि को शून्य से भाग देने से उस राशि की संज्ञा खहर होती है। शून्य से किसी राशि को गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है। यदि किसी राशि को शून्य से गुणा किया जाय और शून्य से ही भाग दिया जाय तो राशि अविकृत (ज्यों की त्यों) रहती है। इसी तरह शून्य के जोड़ने और घटाने में भी समझना चाहिए ॥

उपपत्तिः—शून्यस्याभावद्योतकत्वात्तेन सह क्षेपस्य योगे कृते सति योगफलं क्षेपसमं भवत्येव। एवं शून्यस्य वर्गादयोऽपि शून्यमेवस्यादिति विदां

स्पष्टम् । धनात्मकभाज्यभाजकयोर्मध्ये भाजकमानं यथा यथाऽधिकं भवेत् तथा तथा लब्धेरल्पत्वं स्यादेवं भाजकस्यात्यल्पत्वे लब्धेः परमत्वं स्यादत एव यत्र भाजकमानं परमाल्पं शून्यसमं भवेत्तत्र लब्धेः—परमाधिक्यत्वादानन्त्यमत एव खभाजितो राशिः खहरः स्यादित्युपपन्नमन्यत् सर्वं पूर्वयुक्त्यैवस्पष्टम् ॥

अत्रोद्देशकः ।

खं पञ्चयुग्भवति किं वद खस्य वर्गं ?
मूलं घनं घनपदं खगुणाश्च पञ्च ।
खेनोद्धृता दश च कः खगुणो निजार्ध-
युक्तस्त्रिभिश्च गुणितः खहृतस्त्रिषष्टिः ॥ १ ॥

शून्य में ५ जोड़कर योगफल और शून्य के वर्गादि बताओ । ५ को शून्य से गुणा कर शून्य से भाग देने पर लब्धि बताओ । वह कौन राशि है जिसे शून्य से गुणाकर अपना आधा जोड़कर ३ से गुणाकर शून्य से भाग देने पर ६३ होता है ।

न्यासः ।० एतत् पञ्चयुतं जातम् ५ । खस्य वर्गः० । मूलम्० । घनः० । तन्मूलम्० ।

न्यासः । ५ एते खेन गुणिता जाताः० ।

न्यासः । १० एते खभक्ताः $\frac{१०}{०}$ ।

अज्ञातो राशिस्तस्य गुणः ० । स्वार्धक्षेपः $\frac{१}{२}$ । गुणः ३ । हरः ० । दृश्यम् ६३ । ततो वक्ष्यमाणेन विलोमविधिना इष्टकर्मणा वा लब्धोराशिः १४ । अस्य गणितस्य ग्रहगणिते महानुपयोगः ।

इति शून्यपरिकर्माष्टकम् ।

उदाहरण—श्लोक का पूर्वार्द्ध मूल से स्पष्ट है । उत्तरार्द्ध का प्रश्नोत्तर विलोम विधि से होता है । विलोम विधि में प्रश्न की कल्पना उलटी मानी जाती है । जैसे—योग का घटाव, गुणक का भाजक, भाजक का गुणक, अन्तर का योग । इस तरह से कल्पना करने पर ६३ को एक जगह शून्य गुणक और दूसरी जगह भाजक होने से ६३ वैसे ही रहा । अब ३ पहले गुणक था, सो कल्पना में भाजक हो गया, अतः ३ से ६३ को भाग दिया, तो २१ हुआ । इसमें अपना आधा $\frac{१}{२}$ कल्पना के अनुसार घटेगा अतः

'स्वांशाधिकोन' इस सूत्र से २ + १=३ हुआ। इससे २१ में भाग दिया तो ७ लब्धि आई। इसे २१ में घटाने से १४ हुआ। यही प्रश्न की राशि हुई।

इति शून्य परिकर्माष्टकम्।

अथ व्यस्तविधौ करणसूत्रं वृत्तद्वयम्।

छेदं गुणं गुणं छेदं वर्गं मूलं पदं कृतिम्।
ऋणं स्वं स्वमृणं कुर्याद् दृश्ये राशिप्रसिद्धये ॥ १ ॥
अथ स्वांशाधिकोने तु लवाढ्योनो हरो हरः।
अंशस्त्वविकृतस्तत्र विलोमे शेषमुक्तवत् ॥ २ ॥

विलोमे (व्यस्तविधौ) राशिप्रसिद्धये दृश्ये छेदं गुणं, गुणं छेदं, वर्गं मूलं, पदं कृतिं, ऋणं स्वं, स्वं च ऋणं, कुर्यात्। अथ स्वांशाधिकोने तु लवाढ्योनः हरः हरः कार्यः। तत्र अंशस्तु अविकृत एव स्थाप्यः शेषम् उक्तवदेव कार्यम् ॥ १-२॥

उलटी रीति से राशि जानने के लिए दृश्य अङ्क में भाजक को गुणक, गुणक को हर, वर्ग को मूल, मूल को वर्ग, ऋण को धन और योग को घटाव की क्रिया करनी चाहिए। जहाँ पर अपना अंश जोड़ा या घटाया गया हो, वहाँ क्रम से हर में अंश को जोड़ कर या घटा कर हर कल्पना करें। अंक को वैसा ही रख कर शेष क्रिया पहले की तरह करने से राशि का ज्ञान होता है॥

उपपत्तिः—कल्प्यते $द = \sqrt{\left(\frac{रा \times अ + क}{ग}\right)^2 - घ}$

$\therefore द^2 = \left(\frac{रा \times अ + क}{ग}\right)^2 - घ \therefore द^2 + घ = \left(\frac{रा \times अ + क}{ग}\right)^2$

$\sqrt{द^2 + घ} = \frac{रा \times अ + क}{ग} \quad \therefore ग\sqrt{द^2 + घ} = रा \times अ + क$।

$\therefore रा \times अ = ग\sqrt{द^2 + घ} - क \quad \therefore रा = \frac{ग\sqrt{द^2 + घ} - क}{अ}$

अनेन 'छेदं गुणं गुणं छेदमित्युपपन्नम्।

यदि राशिः = रा, तदाऽऽलापोक्त्या दृश्यम् = द = रा ± $\frac{\text{रा} \times \text{क}}{\text{ग}}$

$\therefore$ द × ग = रा × ग ± रा × क = रा (ग ± क) $\therefore$ रा = $\frac{\text{द} \times \text{ग}}{\text{ग} \pm \text{क}}$

$= \text{द} + \frac{\text{द} \times \text{ग}}{\text{ग} \pm \text{क}} - \text{द} = \text{द} + \frac{\text{द} \times \text{ग} - \text{द}(\text{ग} \pm \text{क})}{\text{ग} \pm \text{क}}$

$= \text{द} + \frac{\text{द} \times \text{ग} - \text{द} \times \text{ग} \pm \text{द} \times \text{क}}{\text{ग} \pm \text{क}} = \text{द} + \frac{\mp \text{द} \times \text{क}}{\text{ग} \pm \text{क}}$

$= \text{द} \mp \frac{\text{द} \times \text{क}}{\text{ग} \pm \text{क}}$ अत उपपन्नं 'स्वांशाधिकोनेतु' इत्यादि सर्वम् ॥

अत्रोद्देशकः ।

यस्त्रिघ्नस्त्रिभिरन्वितः स्वचरणैर्भक्तस्ततः सप्तभिः
स्वत्र्यंशेन विवर्जितः स्वगुणितो हीनो द्विपञ्चाशता ।
तन्मूलेऽष्टयुते हृतेऽपि दशभिर्जातं द्वयं ब्रूहि तं
राशिं वेत्सि हि चञ्चलाक्षि ! विमलां बाले ! विलोमक्रियाम् ॥ १ ॥

वह कौन सी राशि है, जिसको ३ से गुणा कर अपना त्रिगुणित चतुर्थांश जोड़ कर उसमें ७ से भाग देकर अपना तीसरा भाग घटा देते हैं, तब उसके वर्ग में ५२ घटा कर मूल लेकर फिर उसमें ८ जोड़ कर १० से भाग देने पर २ होता है। हे बाले, हे चञ्चलाक्षि, यदि तुम विलोम विधि जानती हो, तो वह राशि बताओ।

न्यासः । गुणः ३ । क्षेपः $\frac{३}{४}$ । भाजकः ७ । ऋणम् $\frac{१}{३}$ । वर्गः ऋणम् ५२ । मूलम् । क्षेपः ८ । हरः १० । दृश्यम् २ । यथोक्तकरणेन जातो राशिः २८ ।

इति व्यस्त विधिः ।

उदाहरण—इस उदाहरण में एक जगह $\frac{३}{४}$ जोड़ा गया है तथा दूसरी जगह $\frac{१}{३}$ घटाया गया है, अतः इन दोनों को 'स्वांशाधिकोनेतु' इस सूत्र से $\frac{३}{४}$ की जगह $\frac{३}{७}$ युत तथा $\frac{१}{३}$ की जगह $\frac{१}{२}$ ऋण समझना चाहिए। दृश्य में अन्त से उलटी क्रिया करने पर राशि का ज्ञान होता है, जो नीचे स्पष्ट है।

गुणक	=	३	=	भाजक	दृ = २
योग	=	$\frac{३}{४} = \frac{३}{७}$	=	ऋण	∴ २ × १० = २०
भाजक	=	७	=	गुणक	२० − ८ = १२
ऋण	=	$\frac{१}{३} = \frac{१}{२}$	=	युत	$(१२)^{२}$ = १४४
वर्ग	=	—	=	मूल	१४४ + ५२ = १९६
ऋण	=	५२	=	योग	१९६ = १४
मूल	=	—	=	वर्ग	१४ + $\frac{१४}{२}$ = २१
योग	=	८	=	ऋण	२१ × ७ = १४७
भाजक	=	१०	=	गुणक	१४७ − $\frac{१४७ \times ३}{७}$ = ८४
दृश्य	=	२		॥	८४ ÷ ३ = २८ = राशि

इति

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

(१) वह कौन सी राशि है, जिसे ३ से गुणा कर अपना $\frac{१}{२}$ जोड़ कर उसके वर्ग में २५ जोड़ देते हैं, और फिर उसके वर्गमूल में ८ जोड़ कर अपना $\frac{१}{७}$ घटा कर शेष में ३ का भाग देने पर ६ होता है ।

(२) वह संख्या बताओ जिसके वर्ग में ७२ घटा कर शेष के वर्गमूल में ७ से भाग देने पर १ होता है ।

(३) वह संख्या बताओ जिसे ४ से गुणाकर अपना $\frac{३}{८}$ जोड़कर योग में ४ से भाग देकर भाग फल में १० जोड़कर ५ घटाने पर ७ का वर्ग होता है ।

(४) वह कौन सी संख्या है जिसमें अपना $\frac{१}{५}$ जोड़कर उसमें ७ जोड़ देते हैं, बाद उसके वर्गमूल में अपना $\frac{१}{५}$ घटाने पर शेष का वर्ग १६ होता है ।

(५) वह संख्या बताओ जिसको ८ से गुणाकर उसके वर्गमूल में २ से भाग देकर जो होता है उसमें २ घटाने से शेष शून्य होता है ।

इति व्यस्तविधिः ।

अथेष्टकर्मसु करणसूत्रं वृत्तम्।

उद्देशकलापवदिष्टराशिः क्षुण्णो हृतोंऽशै रहितो युतो वा।
इष्टाहतं दृष्टमनेन भक्तं राशिर्भवेत् प्रोक्तमितीष्टकर्म ॥१॥

इष्टराशिः उद्देशकालापवत् क्षुण्णः, हृतः, अंशैः रहितः वा युतः कार्यः, अनेन इष्टाहतं दृष्टं भक्तं तदा राशिः भवेत्, इति इष्टकर्मप्रोक्तम्।

यहाँ कल्पित इष्ट अङ्क पर से ही राशि का ज्ञान होता है, अतः इसका नाम इष्टकर्म है। इसमें कोई इष्ट अङ्क कल्पना कर उसमें प्रश्न के अनुसार सारी क्रिया कर जो अङ्क निष्पन्न हो उससे इष्ट गुणित दृष्ट में भाग देने से राशि होती है। जैसे किसी ने पूछा कि वह राशि बताओ जिसे ३ से गुणाकर ४ से भाग देने पर जो लब्धि हो उसमें उसीका तीसरा भाग घटाते हैं, तो शेष २ रहता है। शेष को दृष्ट राशि समझें। राशि ज्ञानार्थ इष्ट अङ्क १ माना। अब प्रश्न के अनुसार १ को ३ से गुणा किया तो १ × ३ = ३ हुआ। इसमें ४ का भाग देकर लब्धि $\frac{३}{४}$ हुआ। $\frac{३}{४}$ में इसी का तीसरा भाग घटाया तो $\left(\frac{३}{४} - \frac{३}{४ \times ३} = \frac{३}{४} - \frac{३}{१२} = \frac{३}{४} - \frac{१}{४} = \frac{२}{४} = \frac{१}{२}\right) = \frac{१}{२}$ हुआ। इससे इष्ट गुणित दृष्ट= १ × २ = २ में भाग दिआ तो $\frac{२}{१} \times \frac{२}{१} = \frac{४}{१} = ४$ आया, यही प्रश्न की राशि है।

उपपत्तिः—अत्र वास्तव राशिः = रा, वास्तव दृश्य = द कल्पितमिष्टम् = इ, अस्मादालापोक्त्या दृश्यम् = द', तदा $\frac{इ}{द'} = \frac{रा}{द}$ आलापस्य स्थिरत्वात्।

$$\therefore रा \times द' = इ \times द \quad \therefore रा = \frac{इ \times द}{द'}$$

अत उपपन्नम्।

अत्रोद्देशकः।

पञ्चघ्नः स्वत्रिभागोनो दशभक्तः समन्वितः।
राशित्र्यंशार्धपादैः स्यात् को राशिर्द्व्यूनसप्ततिः ॥ १ ॥

वह कौन सी राशि है, जिसे ५ से गुणाकर उसका $\frac{१}{३}$ घटाकर १० से भाग देकर लब्धि में राशि का $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{४}$ जोड़ने पर ६८ होता है।

न्यासः। गुणः ५। ऊन $\frac{१}{३}$। हरः १०। राश्यंशाः $\frac{१}{३}$ $\frac{१}{२}$ $\frac{१}{४}$ दृश्यम् ६८।

अत्र किल कल्पितराशिः ३। पंचघ्नः १५ स्वत्रिभागोनः १०। दशभक्तः १। कल्पित—३ राशेस्त्र्यंशार्धपादैः $\frac{३}{३}$ $\frac{३}{२}$ $\frac{३}{४}$ समन्वितो हरो जातः $\frac{१७}{४}$। अथ दृष्टम् ६८ इष्टेन ३ गुणितम् २०४। हरेण $\frac{१७}{४}$ भक्तं जातो राशिः ४८।

एवं सर्वत्रोदाहरणे राशिः केनचिद् गुणितो भक्तो वा राश्यंशेन रहितो युतो वा दृष्टस्तत्रेष्टं राशिं प्रकल्प्य तस्मिन्नुद्देशकालापवत् कर्मणि कृते यन्निष्पद्यते तेन भजेद् दृष्टमिष्टगुणं फलंराशिः स्यात्।

उदाहरण—यहाँ इष्ट ३ कल्पना किया, तब प्रश्न के अनुसार ३ × ५ = १५। $१५ - \frac{१५}{३} = १५ - ५ = १०$। $\frac{१०}{१०} = १$। अब १ में कल्पित राशि (३) का $\frac{३}{३}$, $\frac{३}{२}$ और $\frac{३}{४}$ जोड़ दिया तो $१ + \frac{३}{३} + \frac{३}{२} + \frac{३}{४} = १ + १ + \frac{३}{२} + \frac{३}{४} = \frac{४+४+६+३}{४} = \frac{१७}{४}$ हुआ। इष्ट (३) को दृष्ट ६८ से गुणाकर $\frac{१७}{४}$ से भाग देने पर $३ \times ६८ \div \frac{१७}{४} = \frac{३ \times ६८ \times ४}{१७} = ४८$ उत्तर आया। यही प्रश्न की राशि है।

अपरोदाहरणम्।

अमलकमलराशेस्त्र्यंशपञ्चांशषष्ठै-
स्त्रिनयनहरिसूर्या येन तुर्येण चार्या।
गुरुपदमथ षड्भिः पूजितं शेषपद्मैः
सकलकमलसङ्ख्यां क्षिप्रमाख्याहि तस्य॥ २॥

किसी पूजक ने अपनी कमल राशि का त्रिभाग ($\frac{१}{३}$) से शङ्कर की, पञ्चमांश ($\frac{१}{५}$) से विष्णु की, षष्ठांश ($\frac{१}{६}$) से सूर्य की, चतुर्थांश ($\frac{१}{४}$) से देवी की और बाकी ६ कमलों से गुरु चरणों की पूजा की, तो कुल कमल की संख्या शीघ्र बताओ।

न्यासः $\frac{१}{३}$ $\frac{१}{५}$ $\frac{१}{६}$ $\frac{१}{४}$ दृश्यम् ६।

अत्रेष्टमेकं १ राशिं प्रकल्प्य प्राग्वज्जातो राशिः १२०।

उदाहरण—इष्ट = १ है। अब सूत्र के अनुसार $\frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{४} = \frac{२०+१२+१०+१५}{६०} = \frac{५७}{६०}$, इसको इष्ट १ में घटाया, तो $१ - \frac{५७}{६०} = \frac{६०-५७}{६०} =$

$\frac{३}{६०} = \frac{१}{२०}$ हुआ। इससे इष्ट गुणित दृष्ट १ × ६ = ६ को भाग देने पर ६ ÷ $\frac{१}{२०} = \frac{६ \times २०}{१}$ = १२० कमल की संख्या हुई।

विशेष—इस उदाहरण में ६० का कोई गुणा इष्ट कल्पना करने से अभिन्न विधि से उत्तर होता है यथा इष्ट = ६० है, तो प्रश्न के अनुसार $\frac{६०}{३} + \frac{६०}{५} + \frac{६०}{६} + \frac{६०}{४}$ = २० + १२ + १० + १० = ५७।

∴ ६० − ५७ = ३। अब दृश्य ६ को इष्ट ६० से गुणा कर (६ × ६० = ३६०), ३ से भाग देने पर राशि = १२० = $\frac{३६०}{३}$ इसी तरह १२०, २४०, ३६०, आदि इष्ट से उत्तर होता है।

अथ शेषजातौ विशेष सूत्रम्।

छिद्घातभक्तेन लवोनहारघातेन भाज्यः प्रकटाख्यराशिः।
राशिर्भवेच्छेषलवे तथेदं विलोमसूत्रादपि सिद्धिमेति ॥ १ ॥

प्रकटाख्यराशिः छिद्घातभक्तेन लवोनहारघातेनभाज्यः लब्धिः शेषलवे राशिः भवेत्। तथा इदं विलोमसूत्रात् अपि सिद्धिं एति।

शेष जाति में अपने २ अंशो से घटे हुये हरों के घात को, हरों के घात से भाग देकर जो, हो उससे दृश्य को भाग देने पर राशि होती है। विलोम विधि से भी यह सिद्ध होता है।

उपपत्तिः—कल्प्यते दृश्यम् = $\text{द} = \text{रा} - \frac{\text{रा} \times \text{क}}{\text{ग}} - \left\{ \frac{\text{रा} - \frac{\text{रा}\times\text{क}}{\text{ग}}}{१} \right\} \frac{\text{च}}{\text{म}}$

$$= \frac{\text{रा}\times\text{ग} - \text{रा}\times\text{क}}{\text{ग}} - \frac{(\text{रा}\times\text{ग} - \text{रा}\times\text{क})\,\text{च}}{\text{ग}\times\text{म}} =$$

$$\frac{\text{रा}\cdot\text{ग}\cdot\text{म} - \text{रा}\cdot\text{क}\cdot\text{म} - (\text{रा}\cdot\text{ग}\cdot\text{च} - \text{रा}\,\text{क}\,\text{च})}{\text{ग}\times\text{म}}$$

$$= \frac{\text{रा}\times\text{ग}\times\text{म} - \text{रा}\times\text{क}\times\text{म} - \text{रा}\times\text{ग}\times\text{च} + \text{रा}\times\text{क}\times\text{च}}{\text{ग}\times\text{म}}$$

$$\frac{\text{रा}\,(\text{ग}\times\text{म} - \text{क}\times\text{म} - \text{ग}\times\text{च} + \text{क}\times\text{च})}{\text{ग}\times\text{म}} =$$

$$\text{रा} \left| \frac{\text{ग}\,(\text{म} - \text{च}) - \text{क}\,(\text{म} - \text{च})}{\text{ग}\times\text{म}} \right.$$

$\frac{रा\,(म-च)\,(ग-क)}{ग\times म}$ $\therefore$ रा $= \dfrac{इ}{\frac{(म-च)\,(ग-क)}{ग\times म}}$ उपपन्नम् ।

शेषजात्युदाहरणम् ।

स्वार्धं प्रादात् प्रयागे, नवलवयुगलं योऽवशेषाच्च काश्यां
शेषाङ्घ्रिं शुल्कहेतोः पथि दशमलवान् षट् च शेषाद् गयायाम् ।
शिष्टा निष्कत्रिषष्टिर्निजगृहमनया तीर्थपान्थः प्रयात-
स्तस्य द्रव्यप्रमाणं वद यदि भवता शेषजातिः श्रुताऽस्ति ॥ ३ ॥

हे मित्र ! यदि तु शेष जाति गणित जानते हो, तो बताओ कि किसी तीर्थ यात्री ने अपने द्रव्य का आधा ($\frac{१}{२}$) प्रयाग में, शेष के द्विगुणित नवम भाग ($\frac{२}{९}$) काशी में, फिर बचे हुये का चौथा भाग ($\frac{१}{४}$) मार्ग व्यय में, पुनः अवशिष्ट का षड्गुणित दशम भाग ($\frac{६}{१०}$) गया में खर्च किया। इस रीति से खर्च करने पर भी जब उसके पास ६३ रुपये बचे तब वह घर लौट गया, तो आरम्भ में उसके पास कितने द्रव्य थे।

न्यासः $\frac{१}{२}$ दृश्यम् ६३ । अत्र रूपं १ राशिं प्रकल्प्य भागान्
$\frac{२}{९}$ शेषात् शेषादपास्य जातम् $\frac{५३}{६०}$ ।
$\frac{१}{४}$ अथ वा भागापवाहविधिना
$\frac{६}{१०}$ सवर्णिते जातम् $\frac{७}{६०}$ । अनेन दृष्टे

६३ इष्ट गुणिते भक्ते जातं द्रव्यप्रमाणम् ५४० । इदं विलोमसूत्रेणापि सिध्यति ।

उदाहरण—इष्ट राशि = १ । अतः आधा $\frac{१}{२}$ प्रयाग में दिया ।

शेष = १ − $\frac{१}{२}$ = $\frac{१}{२}$ । $\frac{१}{२}\times\frac{२}{९}=\frac{१}{९}$ काशी में दिया ।

शेष = $\frac{१}{२}-\frac{१}{९}=\frac{७}{१८}$ । $\frac{७}{१८}\times\frac{१}{४}=\frac{७}{७२}$ रास्ते में दिया ।

शेष = $\frac{७}{१८}-\frac{७}{७२}=\frac{२८-७}{७२}=\frac{२१}{७२}=\frac{७}{२४}$ । $\frac{७}{२४}\times\frac{६}{१०}=\frac{७}{४०}$ गया में दिया।

$\therefore$ कुल खर्च = $\frac{१}{२}+\frac{१}{९}+\frac{७}{७२}+\frac{७}{४०}=\frac{३१८}{३६०}=\frac{१५९}{१८०}$ ।

इसे इष्ट राशि में घटाने पर शेष द्रव्य = १ − $\frac{१५९}{१८०}=\frac{१८०-१५९}{१८०}=\frac{२१}{१८०}$ = $\frac{७}{६०}$ । अब इससे इष्ट गुणित दृश्य में भाग देने—

पर राशि = ६३ × १ ÷ $\frac{७}{६०}$ = ५४० ।

वा — $\frac{७}{२४}$ और $\frac{७}{४०}$ का अन्तर करने से $\frac{७}{६०}$ होता है। इससे इष्ट गुणित इष्ट को भाग देने पर राशि होती है।

अथवा—'छिद्रातभक्तेन' इत्यादि सूत्र से—

$\frac{१}{२}, \frac{२}{९}, \frac{१}{४}, \frac{६}{१०}$ इनके हरों में अपने २ अंशों को घटाने से १, ७, ३ और ४ हुये। इनका गुणन फल $= १ \times ७ \times ३ \times ४ = ८४$ हुआ। इसमें हरों के घात से भाग दिया, तो $\frac{१ \times ७ \times ३ \times ४}{२ \times ९ \times ४ \times १०} = \frac{७}{६०}$ हुआ। इससे दृश्य ६३ में भाग दिया तो $६३ \div \frac{७}{६०} = \frac{६३ \times ६०}{७} = ९ \times ६० = ५४०$ राशि का मान आया।

अथवा—भागापवाह विधि से क्रिया करने पर—

$\frac{१}{२}, \frac{२}{९}, \frac{१}{४}, \frac{६}{१०} = \frac{४}{२०}, \frac{२}{९}, \frac{१}{४} = \frac{१२}{८०}, \frac{२}{९} = \frac{८४}{७२०} = \frac{७}{६०}$ अब दृश्य ६३ को $\frac{७}{६०}$ से भाग दिया तो राशि $= ५४०$।

अथवा—विलोम विधि से—$\frac{१}{२}, \frac{२}{९}, \frac{१}{४}, \frac{६}{१०}$ इन अंशों से ऊन होने के कारण स्वोन हर को हर तथा अंश को वैसे ही रख कर न्यास करने से $\frac{१}{१}, \frac{२}{७}, \frac{१}{३}, \frac{६}{४}$ ये भाग हो गये। ये भाग ऋण हैं, अतः विलोम विधि में ये धन हो जायेंगे। अब सूत्र के अनुसार दृश्य $= ६३$। $६३ + \frac{६३ \times ६}{४} = ६३ + \frac{६३ \times ३}{२}$

$= ६३ \left(१ + \frac{३}{२} \right) = \frac{६३ \times ५}{२}$। अब $\frac{६३ \times ५}{२} + \frac{६३ \times ५}{२} \times \frac{१}{३}$

$= \frac{६३ \times ५}{२} \left(१ + \frac{१}{३} \right) = \frac{६३ \times ५ \times ४}{२ \times ३} = २१ \times ५ \times २ = २१०$।

फिर $२१० + \frac{२१० \times २}{७} = २१० + ३० \times २ = २१० + ६० = २७०$

पुनः $२७० + \frac{२७० \times १}{१} = ५४०$ राशि।

अथ विश्लेषजात्युदाहरणम्।

पञ्चांशोऽलिकुलात् कदम्बमगमत् त्र्यंशः शिलीन्ध्रं तयो-
र्विश्लेषस्त्रिगुणो मृगाक्षि ! कुटजं दोलायमानोऽपरः।
कान्ते ! केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रिया-
दूताहूत इतस्ततो भ्रमति खे भृङ्गोऽलिसङ्ख्यां वद ॥ ४ ॥

हे मृगनयनि ! हे प्रिये ! जिन भौरों का पञ्चमांश ($\frac{१}{५}$) कदम्ब पर, तृतीयांश ($\frac{१}{३}$) शिलीन्ध्र पुष्प पर और इन दोनों का त्रिगुणित अन्तर कुटज पुष्प पर चला गया तब बचा हुआ १ भ्रमर केतकी और मालती प्रिया के परिमल रूप दूत से एक ही समय में बुलाये जाने के कारण आकाश में इधर उधर भटक रहा था, उन भौरों की संख्या बताओ।

न्यासः $\frac{१}{५}$ $\frac{१}{३}$ $\frac{२}{५}$ दृश्यम् १ ।

जातमलिकुलमानम् १५ । एवमन्यत्रापि ।

इतीष्टकर्म ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास करने पर $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{३}$ । $(\frac{१}{३} - \frac{१}{५}) \times ३ = (\frac{५-३}{१५}) \times ३ = \frac{२ \times ३}{१५} = \frac{२}{५}$ । दृश्य = १ । अब सूत्र के अनुसार १ इष्ट में उपरोक्त भागों का योग घटाने से शेष = $१ - (\frac{१}{५} + \frac{१}{३} + \frac{२}{५}) = १ - (\frac{३+५+६}{१५})$ $= १ - \frac{१४}{१५} = \frac{१}{१५}$ । अब इससे दृश्य गुणित इष्ट में भाग दिया तो भ्रमर की संख्या = $\frac{१ \times १}{\frac{१}{१५}} = \frac{१ \times १५}{१} = १५$ । अथवा १५ से कटने वाली किसी संख्या को इष्ट कल्पना करने से अभिन्नरीति से उत्तर होगा ।

त्रिशतिकायाः उदाहरणम् ।

षड्भागः पाटलासु भ्रमरनिकरतः स्वत्रिभागः कदम्बे
पादश्चूतद्रुमे च प्रदलितकुसुमे चम्पके पञ्चमांशः ।
प्रोत्फुल्लाम्भोजखण्डे रविकरदलिते त्रिंशदंशोऽभिरेमे
तत्रैको मत्तभृङ्गो भ्रमति नभसि चेत् का भवेद् भृङ्गसंख्या ॥ १ ॥

भ्रमर समूह का $\frac{१}{६}$ पाटल पर, $\frac{१}{३}$ कदम्ब पर, $\frac{१}{४}$ आम के पेड़ पर, $\frac{१}{५}$ चम्पा पुष्प पर और $\frac{१}{३०}$ कमल पर चला गया । शेष १ भ्रमर आकाश में घूमता था तो, कुल भ्रमर की संख्या बताओ ।

उदाहरण—न्यास—$\frac{१}{६}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{३०}$ दृश्य = १ । यहाँ इष्ट १ मानकर इसमें उक्त भागों का योग घटाने से शेष भ्रमर = $१ - (\frac{१}{६} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} + \frac{१}{५} + \frac{१}{३०}) = १ - (\frac{१०+२०+१५+१२+२}{६०}) = १ - \frac{५९}{६०} = \frac{१}{६०}$ । अब इससे इष्ट गुणित दृश्य में भाग दिया तो कुल भ्रमर की संख्या = $१ \times १ \div \frac{१}{६०} = \frac{१ \times ६०}{१} = ६०$ ।

अन्यः प्रश्नः ।

कामिन्या हारवत्याः सुरतकलहतो मौक्तिकानां त्रुटित्वा
भूमौ जातस्त्रिभागः शयनतलगतः पञ्चमांशश्च दृष्टः ।
प्राप्तः षष्ठः सुकेश्या गणक ! दशमकः संगृहीतः प्रियेण
दृष्टं षट्कं च सूत्रे कथय कतिपयैर्मौक्तिकैरेष हारः ॥ २ ॥

हे गणक! सुरत कलह में किसी कामिनी के मोती की माला टूटने से उसका $\frac{1}{3}$ जमीन पर, $\frac{1}{5}$ बिस्तर पर, $\frac{1}{6}$ कामिनी को मिला और $\frac{1}{10}$ उसके स्वामी को मिला। शेष छै मोती धागे में लगे थे, तो कुल मोतियों की संख्या बताओ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास—$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$ दृश्य $= 6$। अब इष्ट १ मान कर उक्त भागों का योग फल घटाने से शेष $= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{24}{30} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$। इससे इष्ट गुणित दृश्य $1 \times 6 = 6$ में भाग देने पर कुल मोतियों की संख्या $= 6 \div \frac{1}{5} = \frac{6 \times 5}{1} = 30$।

अन्यः प्रश्नः।

यूथार्धं सत्रिभागं वनविवरगतं कुञ्जराणां च दृष्टं
षड्भागश्चैव नद्यां पिबति च सलिलं सप्तमांशेन मिश्रः।
पद्मिन्यां चाष्टमांशः स्वनवमसहितः क्रीडते सानुरागो
नागेन्द्रो हस्तिनीभिस्तिसृभिरनुगतः का भवेद्यूथसंख्या ॥ ३ ॥

किसी जंगल में हाथियों का एक बड़ा झुण्ड था। उस झुण्ड का आधा ($\frac{1}{2}$) अपने ($\frac{1}{3}$) से युत होकर वन के भीतर, अपने ($\frac{1}{7}$) से युत ($\frac{1}{6}$) नदी में पानी पीने के लिये और अपने ($\frac{1}{9}$) से युत ($\frac{1}{8}$) कमलवन में गया। शेष ३ हथिनियों के पीछे १ हाथी प्रेम से क्रीड़ा करते हुये देखा गया तो, यूथ की संख्या बताओ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास कर योग करने से $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{42} + \frac{1}{8} + \frac{1}{72} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{1}{42} + \frac{1}{8} + \frac{1}{72} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{8} + \frac{1}{72} = \frac{252 + 168 + 12 + 63 + 7}{504} = \frac{502}{504}$। इष्ट १ में घटाने से शेष हस्ती $= 1 - \frac{502}{504} = \frac{2}{504} = \frac{1}{252}$।

अब दृश्य ४ को इष्ट १ से गुणा कर $\frac{1}{252}$ से भाग देने पर यूथ संख्या $= 4 \times 1 \div \frac{1}{252} = 4 \times 252 = 1008$। अथवा भागानुबन्ध से भी उत्तर होगा।

अन्यः प्रश्नः।

पञ्चांश्या प्रियकल्पिताद्वसुलवा भूषा ललाटीकृता
यच्छेषात्त्रिगुणात्त्रिभागरचिता न्यस्ता स्तनान्तः स्रजि।
शेषार्धं भुजनालयोर्मणिगणः शेषाब्धिकस्त्र्याहतः
काञ्च्यात्मा मणिराशिमाशु वद मे वेण्यां हि यत् षोडश ॥ ४ ॥

किसी स्त्री ने अपने पति के द्वारा दिये हुये मणियों के $\frac{१}{८}$ को मस्तक में लगाया। शेष के $\frac{३}{७}$ को स्तनों के बीच माला में लगाया। शेष के $\frac{१}{२}$ को मणिबन्ध में और उस शेष के $\frac{३}{४}$ को कटि प्रदेश में बाँधा, तब शेष १६ मणियों को वेणी में लगाया तो, मणियों की संख्या बताओ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास करने पर $\frac{१}{८}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ हुये। दृश्य = १६। अब 'छिद् घातभक्तेन' इस सूत्र के अनुसार ऊनीन हार घात किया तो = ७ × ४ × १ × १ = २८ हुआ। हरों का घात = ८ × ७ × २ × ४ = ४४८ से २८ में भाग दिया तो $\frac{२८}{४४८}$ हुआ। इससे दृश्य १६ में भाग देने पर मणियों की संख्या = १६ ÷ $\frac{२८}{४४८}$ = $\frac{१६ \times ४४८}{२८}$ = $\frac{४ \times ४४८}{७}$ = ४ × ६४ = २५६। विलोम सूत्र से भी इसका उत्तर होता है।

अथ द्वीष्टकर्मसु कस्यचित् पद्यम्—

आलापकोक्त्या निहतौ विभक्तावभीष्टराशी सहितोनयुक्तौ
भागैः स्वदृश्याढ्यविहीनितौ तच्छेषौ ततोऽन्योन्यतदिष्टनिघ्नौ ॥
भक्तं तयोरन्तरकं हि शेषान्तरेण शेषप्रमिती धनर्णे
चेत्तद्युतिः शेषयुतिप्रभक्ता राशिर्भवेद्द्वीष्टज कर्मणा वा ॥ १ ॥

द्वीष्ट कर्म में दो इष्ट राशियाँ होती हैं। दोनों इष्ट राशियों को आलाप के अनुसार गुणा, भाग, योग और अन्तर करें। इस तरह क्रिया करने पर दोनों इष्टों पर से दो शेष होंगे, तब पहले शेष को दूसरे इष्ट से तथा दूसरे शेष को प्रथम इष्ट से गुणा कर दोनों का अन्तर करें। इस अन्तर को शेषान्तर से भाग देने पर वास्तव राशि होगी।

यदि एक शेष धन तथा दूसरा ऋण हो, तो दोनों शेषों के योग से परस्पर इष्टों से गुणित शेषों के योग में भाग दें, तो राशि होती है।

उपपत्ति :—अत्रालापोक्त्या दृश्यम् = र = क. य + ग अत्र यदि य = इ, तदा र' = क·इ + ग।

$\therefore$ र $\sim$ र' = क·य + ग − क·इ − ग = क·य $\sim$ क·इ = क (य $\sim$ इ) = शे।

यदि य = इ', तदा र'' = क·इ' + ग।

$\therefore$ र $\sim$ र'' = क·य + ग $\sim$ क·इ' − ग = क·य $\sim$ क·इ' = क (य $\sim$ इ') = शे'।

$$\therefore \frac{\text{शे}}{\text{शे}'} = \frac{\text{क}(\text{य} \backsim \text{इ})}{\text{क}(\text{य} \backsim \text{इ}')} = \frac{\text{य} \backsim \text{इ}}{\text{य} \backsim \text{इ}'}$$

$$\therefore \text{शे} \times (\text{य} \backsim \text{इ}') = \text{शे}' \times (\text{य} \backsim \text{इ})।$$

वा $\text{श}'\cdot\text{य} \backsim \text{श}'\cdot\text{इ}' = \text{शे}'\cdot\text{य} \backsim \text{शे}'\cdot\text{इ}$ वा $\text{शे}'\cdot\text{य} \backsim \text{शे}'\cdot\text{य} = \text{शे}'\cdot\text{इ}' \backsim \text{शे}'\cdot$
$= \text{य}(\text{श}' \backsim \text{शे}') = \text{श}'\cdot\text{इ}' \backsim \text{शे}'\cdot\text{इ}$ ।

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{श}'\cdot\text{इ}' \backsim \text{शे}'\cdot\text{इ}}{\text{श}' \backsim \text{शे}'}$$ अत उपपन्नम् ।

अत्रोदाहरणम् ।

एकस्य रूपत्रिशती षडश्वा अश्वा दशान्यस्य तु तुल्यमूल्याः ।
ऋणं तथा रूपशतं च तस्य तौ तुल्यवित्तौ च किमश्वमूल्यम् ॥ १ ॥

एक व्यक्ति के पास समान मूल्य वाले ६ घोड़े और ३०० रुपये हैं, दूस के पास उसी तरह के १० घोड़े हैं और १०० रुपये ऋण हैं, लेकिन दोनों धन समान हैं, तो १ घोड़े का मूल्य बताओ ।

उदाहरण—प्रथम इष्ट = २० । अब प्रश्न के अनुसार दोनों के धन क्र से—३००० + २० × ६ = ४२० ।

२० × १० − १०० = १०० । इन दोनों का अन्तर = ४२० − १०० = ३२० = प्रथम शेष ।

दूसरा इष्ट = २५ । इस इष्ट पर से पहले का धन = ३०० + २५ × ६ = ४५० । दूसरे का २५ × १० − १०० = १५० । इन दोनों का अन्तर = ४५० - १५० = ३०० = द्वि० शेष । अब प्रथम शेष ३२० को द्वितीय इष्ट २५ से एवं द्वि० शेष ३०० को प्रथम इष्ट २० से गुणा करने पर ८०००, ६००० हुये । इन दोनों का अन्तर = ८००० − ६००० = २००० । इसे शेषान्तर ३२० − ३०० = २० से भाग दिया—तो १ घोड़े का मूल्य = २०००÷२० = १०० रु० ।

∴ प्रथम व्यक्ति का धन = ३०० + १०० × ६ = ९०० । २ व्यक्ति क धन = १०० × १० − १०० = १००० − १०० = ९०० ।

इति इष्टकर्म ।

इष्टकर्म-परिशिष्ट

अभ्यासार्थं प्रश्नाः ।

(१) किसी जमींदार ने अपने धन का $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{९}$ क्रम से अपनी स्त्री, लड़का तथा लड़की को दिया तो उसके पास ४६५००० रु० बच गये तो बताओ उसके पास कुल कितने द्रव्य थे ।

(२) एक चित्रकार ने किसी स्तम्भ के $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{१}{१०}$, को क्रम से लाल, पीले, हरे और काले रंग से चित्रित किया तो शेष १३ हाथ बच गया, तो स्तम्भ की लम्बाई बताओ ।

(३) किसी ने अपने फूलों का $\frac{१}{२}$ शङ्कर को, शेष के $\frac{१}{३}$ लक्ष्मी को, फिर शेष के $\frac{१}{४}$ सरस्वती को, फिर शेष के $\frac{१}{५}$ गणेश को चढ़ाया, तो उसके पास ६० फूल बच गये, तो उसके पास कितने फूल थे ।

(४) किसी गृहस्थ ने अपनी उपज का $\frac{१}{८}$ भोजन के लिये, शेष का $\frac{१}{५}$ बिक्री के लिये, फिर शेष का $\frac{१}{१०}$ खेती के लिये, फिर शेष का $\frac{१}{३}$ विद्यार्थी के खर्च में, बाकी का $\frac{१}{९}$ अतिथि के लिये, शेष का $\frac{१}{१२}$ बीज के लिये, शेष का $\frac{१}{११}$ गुरु के लिये दिया, तो उसके पास ४०० मन बाकी रहा, तो कुल उपज बताओ ।

(५) वह कौन सी संख्या है, जिसके $\frac{१}{२}$ में अपना $\frac{१}{९}$ घटाकर शेष में अपना $\frac{१}{१०}$ घटाकर शेष में अपना $\frac{१}{६}$ घटाकर जो होता है उसमें अपना $\frac{१}{५}$ घटाकर शेष में अपना $\frac{१}{२८}$ घटाने से पुनः शेष में अपना $\frac{१}{१२}$ घटाकर शेष में फिर अपना $\frac{१}{११}$ घटाते हैं, तो शेष २० रहता है ।

द्वीष्टकर्म-परिशिष्ट

अभ्यासार्थं प्रश्नाः ।

(१) एक व्यक्ति के पास २० मन चावल और ५०० रु० हैं, दूसरे के पास ८० मन चावल और १०० रु० ऋण हैं लेकिन दोनों की सम्पत्तियाँ समान हैं—अतः चावल का मूल्य बताओ ।

) एक व्यक्ति को २५ बैल, १० गाय और ५० रु० = हैं, दूसरे को २० गाय, ५० बैल और १२५ रु० ऋण के, तो पशुओं का मूल्य बताओ ।

(३) एक को १० हाथी और ५०० रु० हैं, दूसरे को १५ हाथी और ४९५ रु० हैं। दोनों के धन समान हैं अतः हाथी का मूल्य बताओ।

(४) ५० मन धान + ४०० रु० = ७५ मन धान + १५ रु० तो, धान का मूल्य बताओ।

(५) २० मन गेहूँ − ५० रु० = ४० मन गेहूँ − ५५० रु० का तो, गेहूँ का मूल्य बताओ।

इति द्वीष्टकर्म-परिशिष्ट-विधिः।

संक्रमणे करणसूत्रं वृत्तार्धम्।

योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धितस्तौ राशी स्मृतं संक्रमणाख्यमेतत्।

योगः अन्तरेण ऊनः युतश्च कार्यस्ततः तौ अर्धितौ कार्यौ, तदा राशी स्याताम्। एतत् संक्रमणाख्यं स्मृतम्।

किन्हीं दो राशियों के योग और अन्तर ज्ञात रहने पर उन दोनों राशियों का ज्ञान जिस गणित से हो उसे संक्रमण कहते हैं। इस विधि में योगाङ्क को दो जगह लिखकर उसमें अन्तराङ्क को क्रम से घटाकर और जोड़कर आधा करने से दोनों राशियाँ होती हैं।

उपपत्ति:—योगः = यो = अ + क, अन्तरम् = अं = अ − क।

$\therefore$ यो + अं = (अ + क) − (अ − क) = २ अ।

$\therefore$ अ = $\frac{\text{यो} + \text{अं}}{२}$, एवं यो − अं = २ क।

$\therefore$ क = $\frac{\text{यो} - \text{अं}}{}$

अत उपपन्नम्।

अत्रोद्देशकः।

ययोर्योगः शतं सैकं, वियोगः पञ्चविंशतिः।
तौ राशी वद मे वत्स ! वेत्सि संक्रमणं यदि॥ १॥

हे वत्स ! यदि तुम संक्रमण गणित की विधि जानते हो, तो जिन दो

राशियों का योग १०१ है और अन्तर २५ है, उन दोनों राशियों को बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । योगः १०१ । अन्तरम् २५ । जातौ राशी ३८।६३ ।

उदाहरण—योग = १०१ । अन्तर = २५ । अब सूत्र के अनुसार $\frac{१०१-२५}{२} = \frac{७६}{२} = ३८ =$ छोटी संख्या । एवं $\frac{१०१+२५}{२} = ६३$ ।

$\therefore$ दोनों संख्यायें ३८ और ६३ । वा—एक संख्या निकालकर योगाङ्क में घटाने से दूसरी संख्या होगी ।

अन्यत्करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तं योगस्ततः प्रोक्तवदेव राशी ॥ १ ॥

वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तं योगः स्यात्, ततः प्रोक्तवदेव (संक्रमण विधानेन) राशी स्याताम् ।

राशि वर्गान्तर और राश्यन्तर के ज्ञान से राशि ज्ञान के लिए यह प्रकार है । वर्गान्तर में राश्यन्तर से भाग देने पर दोनों राशियों का योग होता है । अन्तर ज्ञात ही है । अतः संक्रमण की रीति से राशियों का ज्ञान करना चाहिये ।

उपपत्तिः—वर्गान्तरं = व· अ=$अ^२ - क^२$ । राश्यन्तरं=रा· अ·=अ − क ।

$$\therefore \frac{\text{व·अ·}}{\text{रा·अ}} = \frac{अ^२ - क^२}{अ - क} = \frac{(अ + क)(अ - क)}{अ - क} = अ + क = \text{योगः ।}$$

ततः संक्रमणेन राशी सुखेन ज्ञायेते । इति ।

उद्देशकः ।

राश्योर्ययोर्वियोगोऽष्टौ तत्कृत्योश्च चतुःशती ।
विवरं वद तौ राशी शीघ्रं गणितकोविद ! ॥ १ ॥

हे गणित कोविद ! जिन दो राशियों का अन्तर ८ है और वर्गान्तर ४०० हैं, उन दोनों राशियों को बताओ ।

न्यासः । राश्यन्तरम् ८ । कृत्यन्तरम् ४०० । जातौ राशी २१ । २९ ।

उदाहरण—राश्यन्तर = ८ । वर्गान्तर = ४०० । अब सूत्र के अनुसार ४०० ÷ ८ = ५० = योग । तब संक्रमण से राशि = $\frac{५०-८}{२} = \frac{४२}{२} = २१ =$ छोटी संख्या । ५० − २१ = २९ = बड़ी संख्या ।

इति संक्रमणम् ।

परिशिष्ट ।

(१) वर्गान्तर और राशि योग के ज्ञान से राशियों का ज्ञान इस प्रकार होता है । यथा वर्गान्तर = २५, राशि योग = २५

$\therefore \frac{\text{वर्गान्तर}}{\text{रा·यो}} = \frac{२५}{२५}$ = १ = अन्तर । अब संक्रमण से राशि = $\frac{२५-१}{२}$ =

$\frac{२४}{२}$ = १२ = छोटी संख्या ।

$\therefore$ २५ − १२ = १३ = बड़ी संख्या ।

(२) वर्ग योग और राश्यन्तर या राशि योग के ज्ञान से राशि ज्ञान ।

वर्ग योग × २ − राशियोग वर्ग = अन्तर वर्ग ।

वर्ग योग × २ − अन्तर वर्ग = योग वर्ग ।

इनका मूल योग या अन्तर होगा । तब संक्रमण से राशि ज्ञान करना चाहिये ।

जैसे—वर्ग योग = ६८९ राश्यन्तर = १७ ।

$\therefore$ ६८९ × २ − $(१७)^2$ = १३७८ − २८९ = १०८९ = राशि योगवर्ग ।

$\therefore \sqrt{१०८९}$ = ३३ = राशि योग ।

$\therefore \frac{३३-१७}{२} = \frac{१६}{२}$ = ८ प्र० रा० ।

एवं $\frac{१७+३३}{२}$ = २५ = द्वि० रा० । इसी तरह वर्ग योग और राशि योग पर से भी राशियों का ज्ञान करना चाहिए ।

(३) घनान्तर और राश्यन्तर के ज्ञान से राशियों का ज्ञान ।

घनान्तरं राशिवियोगभक्तं वियोगवर्गेण विहीनितं तत् ।
चतुर्गुणं रामहृतं वियोगकृत्या युतं मूलमतो हि राशी ॥ १ ॥

घनान्तर को राश्यन्तर से भाग देकर लब्धि में अन्तर वर्ग घटा कर शेष को ४ से गुणा कर ३ से भाग देकर लब्धि में अन्तर वर्ग को जोड़ कर मूल लेने से योग होता है, तब संक्रमण विधि से राशियों का ज्ञान करना चाहिए ।

उपपति :—य − र = रा·अं = अं । $य^3 - र^3$ = घ·अ ।

$\therefore$ य = र + अं । $य^3$ = घ·अ + $र^3$

$य^3 = (र + अ)^3 = र^3 + ३\, र^2·अ + ३\, र·अ^2 + अ^3$ = घ·अ + $र^3$

= ३ $र^2$·अ + ३ र·$अ^2$ = घ·अ − $अ^3$ = ३ अ ($र^2$ + र·अ) ।

$\therefore र^2 + र\cdot अ = \frac{घ\cdot अ - अ^3}{३ अ} = \frac{घ\cdot अ}{३ अ} - अ^2$ ।

$= ४ र^2 + ४ र\cdot अ = ४\left(\frac{घ\cdot अ}{३ अ} - अ^2\right)$

$= ४ र^2 + ४ र\cdot अ + अ^2 = \frac{४}{३}\left(\frac{घ\cdot अ}{अ} - अ^2\right) + अ^2$

$= २ र + अ = \sqrt{\frac{४}{३}\left(\frac{घ\cdot अ}{अ} - अ^2\right) + अ^2}$

अत्र २ र + अ = योगः ततः संक्रमणेन राशी भवतः ।

उदाहरण—घनान्तर = ३७, राश्यन्तर = १ । अब सूत्र के अनुसार $\frac{३७}{१}$ = ३७ । ३७ - १ = ३६ = शेष । $\therefore \frac{३६ \times ४}{३}$ = ४८ ।

$\therefore ४८ + १^2 = ४९$ । $\sqrt{४९} = ७$ = योग । $\therefore$ संक्रमण द्वारा बड़ी राशि = $\frac{७ + १}{२}$ = ४ । छोटी राशि = ४ − १ = ३ ।

घनयोग और राशियोग के ज्ञान से राशिज्ञान ।

घनैक्यं राशियोगाप्तं योगार्धकृतिवर्जितम् ।
त्रिभक्तं तत्पदेनोनं योगार्धं संयुतं च तौ ॥ १ ॥

घन योग को राशि योग से भाग देकर लब्धि में योगार्ध के वर्ग को घटा कर शेष को ३ से भाग देकर लब्धि का मूल अन्तरार्ध होता है । बाद योगार्ध में अन्तरार्ध को जोड़ने और घटाने पर राशियाँ होती हैं ।

जैसे—घन योग = ७२, राशि योग = ६ । अब ७२ ÷ ६ = १२ । $१२ - \left(\frac{६}{२}\right)^2 = १२ - ९ = ३$ । $\frac{३}{३} = १$ । $\sqrt{१} = १$ = अन्तरार्ध । $\therefore$ योगार्ध + अन्तरार्ध = $\frac{६}{२} + १ = ३ + १ = ४$ = बड़ी राशि । योगार्ध − अन्तरार्ध = $\frac{६}{२} - १ = २$ = छोटी राशि ।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः ।

(१) राशि योग ११५० है और अन्तर १०० है, तो राशियाँ बताओ ।
(२) राशि योग ४० है और अन्तर १० है तो दोनों राशि बताओ ।
(३) वर्गान्तर २३ है और राश्यन्तर १ है, तो दोनों राशि बताओ ।
(४) वर्गान्तर ६९ है और राश्यन्तर ३ है, तो दोनों राशि बताओ ।

(५) वर्गान्तर ७०० है और राशियोग ७० है, तो बड़ी राशि बताओ।

(६) वर्गयोग १०१७ है और राश्यन्तर ३ है, तो छोटी राशि बताओ।

(७) वर्गयोग १४८४१ है और राशियोग १७१ है, तो दोनों राशि बताओ।

(८) घनान्तर १४२९४ और राश्यन्तर १४ है, तो छोटी राशि बताओ।

(९) घनान्तर ३७ है और राश्यन्तर १ है, तो बड़ी राशि बताओ।

(१०) घनान्तर ११७ है और राश्यन्तर ३ है, तो दोनों राशि बताओ।

(११) घनयोग ९१ है और राशि योग ७ है तो छोटी राशि बताओ।

(१२) घनयोग १५७२४८ है और योगार्ध ४२ है, तो बड़ी राशि बताओ।

इति परिशिष्टम्।

अथ किञ्चिद्वर्गकर्म प्रोच्यते, तत्रार्याद्वयम्।

इष्टकृतिरष्टगुणिता व्येका दलिता विभाजितेष्टेन।
एकः स्यादस्य कृतिर्दलिता सैकाऽपरो राशिः॥ २॥
रूपं द्विगुणेष्टहृतं सेष्टं प्रथमोऽथ वाऽपरो रूपम्।
कृतियुतिवियुती व्येके वर्गौ स्यातां ययो राश्योः॥ ३॥

ययोः राश्योः कृति युति वियुती व्येके वर्गौ स्यातां तद्राशिज्ञानार्थमयं प्रकारः। शेषं स्पष्टम्।

जिन दो संख्याओं के वर्गयोग और वर्गान्तर में १ घटाने से वर्ग ही रहता है, उन संख्याओं को जानने के लिए कल्पित इष्ट वर्ग को ८ से गुणा कर १ घटावें। शेष के आधे में इष्ट से भाग देने पर लब्धि प्रथम राशि होती है। प्रथम राशि के वर्गार्ध में १ जोड़ने से दूसरी राशि होती है॥ २॥

अथवा—द्विगुणित इष्ट से १ में भाग देकर लब्धि में इष्ट जोड़ने से प्रथम राशि और १ को दूसरी राशि समझें॥ ३॥

उपपत्ति:—कल्प्येते राशी य, क, तदा द्वितीयालापेन $य^2 - क^2 - १ = य^2 - क^2 - २ + १$। अत्र मध्यपद $= - य \times २ = - क^2 - २$

$\therefore य = \frac{क^2 + २}{२} = \frac{क^2}{२} + १$ अनेनोत्थापितौ राशी $\frac{क^2}{२} + १$, क। ततः

प्रथमालापेन—

$$\left(\frac{\text{क}^{२}}{२}+१\right)^{२}+\text{क}^{२}-१=\frac{\text{क}^{४}}{४}+\text{क}^{२}+१+\text{क}^{२}-१$$

$=\frac{\text{क}^{४}}{४}+२\,\text{क}^{२}$ अयं वर्गस्तेन $\text{क}^{२}$ अनेनापवर्त्य जातम् $\frac{\text{क}^{२}}{४}+२$ तत 'इष्ट-भक्तो द्विधाक्षेपः' इत्यादिना इष्टम् $=४\,\text{इ}$ $\therefore \frac{२}{४\text{इ}}=\frac{१}{२\text{इ}}$ $\therefore ४\text{इ}-\frac{१}{२\text{इ}}=\frac{८\,\text{इ}^{२}-१}{२\,\text{इ}}=\text{क}$ । $\therefore$ प्रथमराशिः $=\text{क}=\frac{८\,\text{इ}^{२}-१}{२\,\text{इ}}$ । द्वितीयः $=\frac{\text{क}^{२}}{२}+१$

अत उपपन्नः प्रथमः प्रकारः । द्वितीयप्रकारे तु — राशी य, १ । अनयोर्वर्गयुतिर्व्येका मूलदा भवत्येव । तथा अनयोर्वर्गान्तरं निरेकं $=\text{य}^{२}-२$ । अयंवर्गस्तेन 'इष्टभक्तो द्विधाक्षेपः' इत्यादिना अत्रेष्टम् $=-२\,\text{इ}$ । $\therefore \frac{-२}{-२\text{इ}}$ ।

$$\therefore\ -२\text{इ}+\frac{२}{२\text{इ}}=\frac{४\text{इ}^{२}+२}{२\text{इ}}\ \therefore\ \text{दलितः}\ \frac{४\text{इ}^{२}+२}{२\text{इ}\times२}=\frac{४\text{इ}^{२}+२}{४\text{इ}}$$

$=\text{इ}+\frac{१}{२\text{इ}}=\text{य}$ $\therefore$ राशी $\frac{१}{२\text{इ}}+१,\ १$ उपपन्नं सर्वम् ।

उद्देशकः ।

राश्योर्ययोः कृतिवियोगयुती निरेके
मूलप्रदे प्रवद तौ मम मित्र ! यत्र ।
क्लिश्यन्ति बीजगणिते पटवोऽपि मूढाः
षोढोक्तबीजगणितं परिभावयन्तः ॥ १ ॥

हे मित्र ! जिन राशियों के वर्गयोग और वर्गान्तर में १ घटाने पर शेष वर्गात्मक ही बचते हैं, उन राशियों को बताओ । जिनको जानने में छै प्रकार के गणितों (योग, अन्तर, गुणा, भाग, वर्ग, वर्गमूल) को जानने वाले बीजगणित में चतुर रहने पर भी मूर्ख की तरह क्लेश पाते हैं ।

अत्र प्रथमानयने कल्पितमिष्टम् $\frac{१}{२}$ । अस्य कृतिः $\frac{१}{४}$ ।
अष्टगुणा जातः २ । अयं व्येकः $\frac{१}{१}$ । दलितः $\frac{१}{२}$ ।
इष्टेन $\frac{१}{२}$ हृतो जातः प्रथमो राशिः १ ।

अस्य कृतिः १ । दलिता $\frac{१}{२}$ । सैका $\frac{३}{२}$ । अयमपरो राशिः ।

एवमेतौ राशी $\frac{१}{१}$ । $\frac{३}{२}$ ।

एवमेकेनेष्टेन जातौ राशी $\frac{७}{२}$, $\frac{५७}{८}$ । $\frac{३१}{४}$ द्विकेन $\frac{११३}{३२}$ ।

अथ द्वितीयप्रकारेणेष्टम् १। अनेन द्विगुणेन २। रूपंभक्तम् $\frac{१}{२}$ इष्टेन सहितं जातः प्रथमो राशिः $\frac{३}{२}$। द्वितीयो रूपम् १ । एवं राशी $\frac{३}{२}$ $\frac{१}{१}$

एवं द्विकेन $\frac{९}{४}$ $\frac{२}{१}$ । त्रिकेन $\frac{१९}{६}$ $\frac{३}{१}$ । ऽयंशेन $\frac{१}{३}$ जातौ राशी $\frac{११}{६}$, $\frac{१}{३}$ ।

उदाहरण—यहाँ इष्ट = $\frac{१}{२}$ मान लिया । अब सूत्र के अनुसार $\left(\frac{१}{२}\right)^{२} = \frac{१}{४}$ । $\frac{१ \times ८}{४} = २$ । २ − १ = १ । $\frac{१}{२}$ । $\frac{१}{२} \div \frac{१}{२} = \frac{१}{२} \times \frac{२}{१} = १$ = प्रथम राशि । अब १ का वर्ग का आधा ($\frac{१}{२}$) में १ जोड़ा तो $\frac{३}{२}$ = द्वितीय राशि ।

दूसरा प्रकार—यदि इष्ट = १ है तो १ में द्विगुणित इष्ट से भाग देकर १ जोड़ने पर प्रथम राशि = $\frac{१}{२} + १ = \frac{३}{२}$ । द्वितीय राशि = १ । इसी तरह दो तीन आदि इष्ट मानकर अनेक राशियाँ होती हैं ।

अथवा सूत्रम् ।

इष्टस्य वर्गवर्गो घनश्च तावष्टसंगुणौ प्रथमः ।
सैको राशी स्यातामेवं व्यक्तेऽथ वाऽव्यक्ते ॥ ४ ॥

इष्ट के वर्ग वर्ग और घन को ८ से गुणा कर दो जगह रखें । पहले में १ जोड़ दें तो प्रथम राशि और दूसरी राशि अष्टगुणित घन ही होता है । इसी तरह व्यक्त और अव्यक्त में राशियाँ होती हैं ।

उपपत्तिः—अत्र कल्पितौ राशी य + १ । क १

$\therefore (य + १)^{२} + क^{२} - १ =$ वर्ग ।

$\therefore य^{२} + २य + १ + क^{२} - १ = य^{२} + २य + क^{२} = य^{२} + क^{२} + २य$

अत्र मूलग्रहणरीत्या $- २य \sqrt{२य} = क^{२}$ ।

$\therefore ४य^{२} \times २य = क^{४} = ८य^{3} = क^{४}$ । अत्र $य = क \times इ$ ।

$\therefore य^{3} = क^{3} \times इ^{3}$ ।

$\therefore ८य^{3} = क^{3} \times इ^{3} \times ८ = क^{४}$ । पक्षौ $क^{3}$, अनेन भक्तौ तदा $८इ^{3} = क$, अनेनोत्थापितौ राशी $= ८इ^{४} + १$ । $८इ^{3}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

इष्टम् $\frac{१}{२}$ । वर्गवर्गः $\frac{१}{१६}$ । अष्टघ्नः $\frac{१}{२}$ । सैको जातः प्रथमो राशिः $\frac{३}{२}$ ।
पुनरिष्टम् $\frac{१}{२}$ अस्य घनः $\frac{१}{८}$ । अष्टगुणो जातो द्वितीयो राशिः $\frac{१}{१}$ ।
एवं जातौ राशी $\frac{३}{२}$ $\frac{१}{१}$ ।

अथैकेष्टेन ९ । ८ । द्विकेन १२९ । ६४ । त्रिकेण ६४९ । २१६ ।

एवं सर्वेष्वपि प्रकारेष्विष्टवशादानन्त्यम् ।

उदाहरण—इसका गणित मूल में स्पष्ट है अतः नहीं लिखा गया ।

पाटीसूत्रोपमं बीजं गूढमित्यवभासते ।
नास्ति गूढमगूढानां नैव षोढेत्यनेकधा ॥ १ ॥
अस्ति त्रैराशिकं पाटी, बीजं च विमला मतिः ।
किमज्ञातं सुबुद्धीनामतो मन्दार्थमुच्यते ॥ २ ॥

पाटी गणित के तुल्य जो बीजगणित वह कठिन जान पड़ता है, किन्तु बुद्धिमानों के लिए कठिन नहीं है । यह छे प्रकार का ही नहीं हैं, बल्कि अनेक प्रकार का है ॥ १ ॥ त्रैराशिक ही पाटी गणित है और निर्मल बुद्धि ही बीज गणित है, अतः बुद्धिमानों के लिए कुछ भी अज्ञात नहीं है, फिर भी मैं मन्द बुद्धियों के लिये कहता हूँ ॥ २ ॥

इति वर्गकर्म ।

अथ गुणकर्म ।

गुणघ्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य युक्तस्य गुणार्धकृत्या ।
मूलं गुणार्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं प्रष्टुरभीष्टराशिः ॥ ५ ॥
यदा लवैश्चोनयुतः स राशिरेकेन भागोनयुतेन भक्त्वा ।
दृश्यं तथा मूलगुणं च ताभ्यां साध्यस्ततः प्रोक्तवदेव राशिः ॥ ६ ॥

गुणघ्नमूलोनयुतस्य राशेर्दृष्टस्य गुणार्धकृत्या युक्तस्य मूलं गुणार्धेन युतं विहीनं वर्गीकृतं तदा प्रष्टुः अभीष्टराशिः स्यात् । यदा स राशिः लवैः ऊनयुतः तदा भागोनयुतेन एकेन दृश्यं तथा मूलगुणं च भक्त्वा ततः ताभ्यां प्रोक्तवत् एव राशिः साध्यः ॥ २ ॥

इष्ट गुणित अपने मूल से ऊन यदि दृश्य हो, तो उसमें गुणार्धं का वर्ग जोड़कर मूल लेना चाहिये। मूल में फिर गुणार्धं को जोड़कर वर्ग करने से राशि होती है। यदि इष्ट गुणित अपने मूल से युक्त दृश्य हो, तो उसमें अपने गुणार्धं का वर्ग जोड़कर जो मूल हो उसमें गुणार्धं घटाकर वर्ग करने से राशि होगी।

यदि वह राशि अपने अंशों से ऊन या युत हो, तो उस भाग को १ में घटाकर या जोड़कर दृश्य और मूल गुणक में भाग दें, तो नवीन दृश्य और मूल गुणक होते हैं, उन दोनों पर से उक्त रीति द्वारा राशि का ज्ञान करना चाहिये।

उपपत्ति:—राशिः = रा।

$रा \mp गु\cdot \sqrt{रा} = दृ\cdot$। पक्षयोर्वर्गपूर्त्या—

$$रा \mp गु\cdot \sqrt{रा} + \left(\frac{गु}{२}\right)^२ = दृ + \left(\frac{गु}{२}\right)^२$$ । पक्षयोर्मूले—

$$\sqrt{रा} \mp \frac{गु}{२} = \sqrt{दृ + \left(\frac{गु}{२}\right)^२} \quad \therefore \sqrt{रा} = \sqrt{\left(\frac{गु}{२}\right)^२ + दृ} \pm \frac{गु}{२}$$

$$\therefore रा = \left(\sqrt{\left(\frac{गु}{२}\right)^२ + दृ} \pm \frac{गु}{२}\right)^२$$ उपपन्नं पूर्वार्द्धम्।

यदा लवैश्चोनयुतश्च राशिरित्यस्य—

$$रा \mp \frac{रा \times क}{अ} \mp गु \sqrt{रा} = दृ$$

$$= रा\left(१ \mp \frac{क}{अ}\right) \mp गु\sqrt{रा} = दृ$$ । पक्षौ $१ \mp \frac{क}{अ}$ अनेनभक्तौ

$$तदा\ रा \mp \frac{गु \sqrt{रा}}{१ \mp \frac{क}{अ}} = \frac{दृ}{१ \mp \frac{क}{अ}}$$

$$= रा \mp न\cdot मू\cdot गु\cdot \sqrt{रा} = नवीन\ दृश्य = न\cdot दृ\cdot$$ ।

$$\therefore रा \mp न\cdot मू\cdot गु\cdot \sqrt{रा} + \left(\frac{न\cdot मू\cdot गु\cdot}{२}\right)^२ = न\cdot दृ\cdot + \left(\frac{न\cdot मू\cdot गु\cdot}{२}\right)^२$$

$$\therefore \sqrt{रा} \mp \frac{न\cdot मू\cdot गु\cdot}{२} = \sqrt{न\cdot दृ + \left(\frac{न\cdot मू\cdot गु}{२}\right)^{२}}$$

$$\therefore \sqrt{रा} = \sqrt{न\cdot दृ + \left(\frac{न\cdot मू\cdot गु}{२}\right)^{२}} \pm \frac{न\cdot मू\cdot गु}{२}$$

$$\therefore रा = \left(\sqrt{न\cdot दृ + \left(\frac{न\cdot मू\cdot गु}{२}\right)^{२}} \pm \frac{न\cdot मू\cdot गु}{२}\right)^{२}$$

अत उपपन्नं सर्वम् ।

मूलोने दृष्टे तावदुदाहरणम् ।

बाले ! मरालकुलमूलदलानि सप्त तीरे विलासभरमन्थरगाण्यपश्यम् ।
कुर्वच्च केलिकलहं कलहंसयुग्मं शेषं जले वद मरालकुलप्रमाणम् ॥१॥

हे बाले ! हंस समूह के वर्गमूल का सप्तगुणित आधा ($\frac{७}{२}$) को क्रीड़ा की थकावट से धीरे-धीरे जाते हुए सरोवर के तट पर मैंने देखा । शेष २ हंस को क्रीड़ा-कलह करते हुये पानी में देखा, तो हंसों की संख्या बताओ ।

यो राशिः स्वमूलेन केनचिद्गुणितेन ऊनो दृष्टस्तस्य गुणार्धकृत्या युक्तस्य दृष्टस्य यत् पदं तद् गुणार्धेन युक्तं कार्यं, यदि गुणघ्नमूलयुतो दृष्टस्तर्हि हीनं कार्यं, तस्य वर्गो राशिः स्यात् ।

न्यासः । मूलगुणः $\frac{७}{२}$ । दृष्टम् २ । दृष्टस्यास्य २ गुणार्धकृत्या $\frac{४९}{१६}$ । युक्तस्य $\frac{८१}{१६}$ मूलम् $\frac{९}{४}$ । गुणार्धेन $\frac{७}{४}$ । युतं $\frac{१६}{४}$ वर्गीकृतं हंसकुलमानम् १६ ।

उदाहरण—मूल गुणक = $\frac{७}{२}$ । दृश्य = २ । अब सूत्र के अनुसार गुणार्ध $\frac{७}{४}$ के वर्ग $\frac{४९}{१६}$ को दृश्य में जोड़ा तो $२ + \frac{४९}{१६} = \frac{३२+४९}{१६} = \frac{८१}{१६}$ हुआ । इसका मूल ($\frac{९}{४}$) में गुणार्ध ($\frac{७}{४}$) जोड़ कर वर्ग करने से हंसों की संख्या—
$= \frac{९}{४} + \frac{७}{४} = \frac{१६}{४} = ४$ । $(४)^{२} = १६$ । ∴ उत्तर १६ ।

अथ मूलयुते दृष्टे चोदाहरणम् ।

स्वपदैर्नवभिर्युक्तः स्याच्चत्वारिंशताधिकम् ।
शतद्वादशकं विद्वन् ! कः स राशिर्निगद्यताम् ॥ २ ॥

हे विद्वन् ! जिस राशि में अपना ९ गुणित मूल जोड़ने से १२४० होता है वह राशि बताओ ॥ २ ॥

न्यासः। मूलगुणः ९ दृश्यम् १२४०। गुणार्धं $\frac{९}{२}$ मस्य कृत्या $\frac{८१}{४}$ युक्तं जातम् $\frac{५०४१}{४}$। अस्य मूलं $\frac{७१}{२}$। गुणार्धेन $\frac{९}{२}$ अत्र विहीनं $\frac{६२}{२}$ वर्गीकृतं $\frac{३८४४}{४}$। छेदेन हृते जातो राशिः ९६१।

उदाहरण = मूल गुणक ९। दृश्य = १२४०। सूत्र के अनुसार गुणार्ध के वर्ग $(\frac{९}{२})^२ = \frac{८१}{४}$ को दृश्य १२४० में जोड़ कर मूल लेने से – $\frac{८१}{४} + \frac{१२४०}{१} = \frac{८१+४९६०}{४} = \frac{५०४१}{४}$। $\sqrt{\frac{५०४१}{४}} = \frac{७१}{२}$, यह हुआ। इसमें गुणार्ध $(\frac{९}{२})$ को घटा कर वर्ग करने से राशि=$(\frac{७१}{२} - \frac{९}{२})^२ = (\frac{६२}{२})^२ = (३१)^२ = ९६१$।

भागोने उदाहरणम्।

यातं हंसकुलस्य मूलदशकं मेघागमे मानसं
प्रोड्डीय स्थलपद्मिनीवनमगादष्टांशकोऽम्भस्तटात्।
बाले! बालमृणालशालिनि जले केलिक्रियालालसं
दृष्टं हंसयुगत्रयं च सकलां यूथस्य संख्यां वद॥ ३॥

हे बाले! वर्षा ऋतु आने पर किसी हंस–समूह का १० गुणित मूल मानस सरोवर को गया और उसी का $\frac{१}{८}$ जल के किनारे से उड़ कर स्थलकमलिनी-वन को गया। शेष कोमल कमल-नालों से शोभित जल में क्रीड़ा की लालसा से ३ जोड़े (६) हंसों को मैंने देखा, तो कुल हंसों की संख्या बताओ॥ ३॥

न्यासः। मूलगुणः १०। अष्टांशः $\frac{१}{८}$। दृश्यम् ६। यदा लवैश्चोनयुत-इत्युक्तत्वादत्रैकेन भागोनेन $\frac{७}{८}$ दृश्यमूलगुणौ भक्त्वा जातं दृश्यम् $\frac{४८}{७}$ मूलगुणः $\frac{८०}{७}$। गुणार्धम् $\frac{४०}{७}$। अस्य कृत्या $\frac{१६००}{४९}$ युक्तम् $\frac{१९३६}{४९}$ अस्य मूलं $\frac{४४}{७}$ गुणार्धेन $\frac{४०}{७}$ युक्तं १२ वर्गीकृतं जातो हंसराशिः १४४

उदाहरण—इस उदाहरण में राशि अपने $\frac{१}{८}$ भाग से ऊन है अतः 'यदा लवैश्चोनयुतश्च राशिः' इस सूत्र के अनुसार १ में $\frac{१}{८}$ को घटाकर शेष से दृश्य (६) और मूलगुणक (१०) में भाग देने पर नवीन दृश्य और मूलगुणक होंगे। जैसे—$१ - \frac{१}{८} = \frac{७}{८}$ ∴ $६ \div \frac{७}{८} = \frac{६ \times ८}{७} = \frac{४८}{७}$ = नवीन दृश्य। $१० \div \frac{७}{८} = \frac{१० \times ८}{७} = \frac{८०}{७}$ = नवीन मूलगुणक। अतः 'गुणार्धकृत्या युक्तस्य दृश्यस्य' इसके अनुसार क्रिया करने पर—गुणार्ध = $\frac{८०}{७} \div २ = \frac{४०}{७}$। $(\frac{४०}{७})^२ = \frac{१६००}{४९}$।

$\therefore \frac{१६००}{४९} + \frac{४८}{७} = \frac{१६००+३३६}{४९} = \frac{१९३६}{४९}$ । $\therefore \sqrt{\frac{१९३६}{४९}} = \frac{४४}{७}$ ।

$\therefore$ गुणार्धं $\frac{४०}{७} + \frac{४४}{७} = \frac{८४}{७} = १२$ । $(१२)^2 = १४४$ हंसों की संख्या आई ॥ ३ ॥

अथ भागमूलोने दृष्टे उदाहरणम् ।

पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे संदधे
तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ।
शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपि च्छत्रं ध्वजं कार्मुकं
चिच्छेदास्य शिरः शरेण कति ते यानर्जुनः संदधे ॥ ४ ॥

अर्जुन ने युद्ध में क्रुद्ध होकर कर्ण को मारने के लिये कुछ बाणों को लेकर, उनके आधे से कर्ण के बाणों को रोका, और सभी बाणों के चतुर्गुणित मूल से घोड़ों को मारकर ६ बाणों से शल्य को, ३ से कर्ण के छत्र, ध्वजा और धनुष को तथा १ बाण से उसका शिर काट डाला, तो बताओ उसने कितने बाणों को धारण किया था ॥ ४ ॥

न्यासः । भागः $\frac{१}{२}$ । मूलगुणकः ४ । दृश्यम् १० । यदा लवैश्चोनयुत इत्यादिना जातं बाणमानम् १०० ।

उदाहरण—मूलगुणक = ४ । भाग = $\frac{१}{२}$ । दृश्य = १० । अब पहले की तरह—$१ - \frac{१}{२} = \frac{१}{२}$ $\therefore १० \div \frac{१}{२} = २०$ = नवीन दृश्य । $४ \div \frac{१}{२} = ८$ = नवीन मूल गुणक । गुणार्धं = $\frac{८}{२} = ४$ $\therefore (४)^2 = १६$ । $१६ + २० = ३६$ । $\sqrt{३६} = ६$ $\therefore ६ + ४ = १०$ । $(१०)^2 = १००$ । अतः बाणों की संख्या = १०० ।

अपि च ।

अलिकुलदलमूलं मालतीं यातमष्टौ
निखिलनवमभागाश्चालिनी भृङ्गमेकम् ।
निशि परिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं
प्रति रणति रणन्तं ब्रूहि कान्तेऽलिसंख्याम् ॥ ५ ॥

हे कान्ते ! भ्रमर-समूह का $\frac{८}{९}$ भाग तथा उस समूह के आधे $\frac{१}{२}$ के मूल-तुल्य मालती फूल पर गये, और सुगन्धि के लोभ से रात में कमल-कोश में

कान्त होने के कारण गूँजते हुये एक भौंरे के प्रति बाहर में १ भ्रमरी भी गूँज रही थी, तो कुल भ्रमरों की संख्या बताओ ॥ ५ ॥

अत्र किल राशिनवांशाष्टकं राश्यर्धमूलं च राशेर्न्यूनं, दृश्यं रूपं दृश्यम्। एतदूनं दृश्यं चार्धितं राश्यर्धस्य भवतीति। तत्रापि राश्यंशार्धं राश्यंशार्धस्वांशः स्यादिति भागः स एव।

तथा न्यासः। भागाः $\frac{८}{९}$। मूलगुणकः $\frac{१}{२}$। दृश्यम् १ राश्यर्धस्य स्यादिति भागन्यासोऽत्र। अतः प्राग्वल्लब्धं राशिदलम् ३६।

एतद्द्विगुणितमलिकुलमानम् ७२।

उदाहरण—इस प्रश्न में राशि अवर्गाङ्क है, क्योंकि आधे का मूल होता है। अतः दृश्य और मूल गुणक के आधे पर से क्रिया करने पर राशि के आधे का ज्ञान होगा। उसको दूना करने पर राशि होगी। जैसे—मूल गुणक $= \frac{१}{२}$, भाग $\frac{८}{९}$, दृश्य १। अब पहली रीति से क्रिया करने पर—$१ - \frac{८}{९} = \frac{१}{९}$। $१ \div \frac{१}{९} = ९ =$ न·दृ· $\frac{१}{२} \div \frac{१}{९} = \frac{१}{२} \times \frac{९}{१} = \frac{९}{२} =$ न० मूल गु०। गुणार्ध $= \frac{९}{२ \times २} = \frac{९}{४}$।

$\therefore$ न· दृ $९ + \left(\frac{९}{४}\right)^२ = ९ + \frac{८१}{१६} = \frac{१४४ + ८१}{१६} = \frac{२२५}{१६}$।

$\therefore \sqrt{\frac{२२५}{१६}} = \frac{१५}{४}$। $\frac{१५}{४} + \frac{९}{४} = \frac{२४}{४} = ६$। $(६)^२ = ३६ =$ राश्यर्ध।

$\therefore ३६ \times २ = ७२ =$ भ्रमर की संख्या।

अथ भागयुते उदाहरणम्।

यो राशिरष्टादशभिः स्वमूलै राशित्रिभागेन समन्वितश्च।
जातं शतद्वादशकं तमाशु जानीहि पाट्यां पटुताऽस्ति ते चेत् ॥ ६ ॥

यदि तुम्हें पाटीगणित में पटुता है, तो वह राशि बताओ, जिसमें अपने मूल का १८ गुणा और अपना $\frac{१}{३}$ भाग जोड़ने पर १२०० होता है ॥ ६ ॥

न्यासः। भागः $\frac{१}{३}$ मूलगुणकः १८। दृश्यम् १२००। अत्रैकेन भागयुतेन $\frac{४}{३}$ मूलगुणं दृश्यं च भक्त्वा प्राग्वज्जातो राशिः ५७६।

उदाहरण—मूल गुणक = १८, भाग = $\frac{१}{३}$, दृश्य १२००। इस प्रश्न में भाग $\frac{१}{३}$ युत है अतः १ में $\frac{१}{३}$ को जोड़ कर मूल गुणक और दृश्य में भाग देने पर नवीन मूल गुणक और नवीन दृश्य होंगे। जैसे—$१ + \frac{१}{३} = \frac{४}{३}$। दृश्य

$१२०० \div \frac{४}{३} = \frac{१२०० \times ३}{४} = ३०० \times ३ = ९०० =$ नवीन द्रव्य । मूल गुणक $१८ \div \frac{४}{३} = \frac{१८ \times ३}{४} = \frac{९ \times ३}{२} = \frac{२७}{२} =$ न० मूलगुणक । गुणार्ध $= \frac{२७}{४}$ है ।

$\therefore \left(\frac{२७}{४} \right)^२ + ९०० = \frac{७२९}{१६} + ९०० = \frac{७२९ + १४४००}{१६} = \frac{१५१२९}{१६}$ ।

$\sqrt{\frac{१५१२९}{१६}} = \frac{१२३}{४}$ । इसमें गुणार्ध घटाने से $\frac{१२३}{४} - \frac{२७}{४} = \frac{९६}{४} = २४$ ।

$\therefore (२४)^२ = ५७६ =$ राशि ।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः ।

(१) वह संख्या बताओ, जिसमें अपने वर्ग मूल का २१ गुणा जोड़ देने से १६९६ हो जाता है ।

(२) वह कौन सी संख्या है, जिसमें उस संख्या के मूल का १२ गुणा घटाने से ५४० होता है ।

(३) वह संख्या बताओ जिसमें अपने $\frac{१}{७}$ के मूल का ३० गुणा और अपना $\frac{५}{१२}$ घटाने से ७८३ होता है ।

(४) जिसमें अपने ८ गुणा का मूल और अपना $\frac{१}{१०}$ भाग घटाने से १४० होता है, वह संख्या बताओ ।

(५) वह संख्या बताओ जिसमें अपने दूने के मूल का (३) गुणा और अपना $\frac{३}{२}$ जोड़ने से ६७१ होता है ।

(६) किसी आदमी ने अपने धन के वर्ग मूल का १५ गुणा अपने पुत्र को तथा धन का $\frac{१}{३}$ लड़की को दिया, तो उसके पास ८१ रु० बच गये, तब कुल रुपये कितने थे ।

(७) वह कौन सी संख्या है, जिसमें अपने $\frac{१}{८}$ का मूल और अपने $\frac{९}{१००}$ भाग को घटाने से २८९२ होता है ।

(८) वह संख्या बताओ, जिसमें अपने मूल का ११ गुणा और अपना $\frac{४}{६}$ जोड़ने से १९५० होता है ।

(९) वह संख्या बताओ, जिसमें अपने मूल का ८ गुणा और अपना $\frac{१}{४}$ घटा देने से ८८० होता है ।

इति गुणकर्म ।

अथ त्रैराशिके करणसूत्रं वृत्तम् ।

प्रमाणमिच्छा च समानजाती आद्यन्तयोस्तत्फलमन्यजातिः ।
मध्ये तदिच्छाहतमाद्यहृत् स्यादिच्छाफलं व्यस्तविधिर्विलोमे ॥७॥

प्रमाणम् इच्छा च समानजाती भवतः । ते आद्यन्तयोः स्थाप्ये । फलम् अन्यजातिः भवति, तत् मध्ये स्थाप्यम् । तत् फलम् इच्छा हतम् आद्यहृत् तदा इच्छाफलम् स्यात् । विलोमे व्यस्तविधिः कार्यः ॥ ७ ॥

तीन ज्ञात राशियों से चौथी राशि का ज्ञान जिस गणित से होता है, उसे त्रैराशिक कहते हैं । यहाँ आचार्य ने तीनों ज्ञात राशियों के नाम क्रम से प्रमाण, प्रमाण फल और इच्छा रखा है । अज्ञात चौथी राशि का नाम इच्छा फल है । प्रमाण और इच्छा एक जाति की होती है । इनको आदि और अन्त में लिखना चाहिये । प्रमाण फल को इच्छा से गुणा कर प्रमाण से भाग देने पर इच्छा फल होता है ।

जैसे—किसी ने प्रश्न किया कि १ रु० में ५ आम मिलते हैं, तो ५ रु० में कितने मिलेंगे । यहाँ १ रु० = प्रमाण । ५ आम = प्रमाण फल । ५ रु० = इच्छा । अब पूर्व रीति से प्रमाण फल को इच्छा से गुणा कर प्रमाण से भाग दिया, तो चौथी अज्ञात राशि इच्छा फल = $\frac{५ \times ५}{१}$ = २५ । विलोम में अर्थात् व्यस्त त्रैराशिक में उलटी क्रिया करनी चाहिये, अर्थात् प्रमाण को प्रमाण फल से गुणा कर इच्छा से भाग देने पर इच्छा फल होता है । क्रम त्रैराशिक में इच्छा की न्यूनता या वृद्धि से इच्छा फल की न्यूनता या वृद्धि होती है और व्यस्त त्रैराशिक में इसकी उलटी रीति समझनी चाहिए । आगे ग्रन्थकार ने खुद ही स्पष्टीकरण किया है ।

उपपत्तिः— $\because \frac{\text{प्रमाण}}{\text{प्रमाणफल}} : : \frac{\text{इच्छा}}{\text{इच्छाफल}}$

$\therefore$ प्रमाण × इच्छाफल = प्रमाणफल × इच्छा ।

$\therefore$ इच्छा फल = $\frac{\text{प्र॰फ} \times \text{इच्छा}}{\text{प्र॰}}$, उपपन्नं त्रैराशिकम् । व्यस्तत्रैराशिके तु—

$\frac{\text{प्र॰फ॰}}{\text{इ॰}} = \frac{\text{इ॰फ॰}}{\text{प्र॰}} \therefore \text{इ॰फ} = \frac{\text{प्र॰फ} \times \text{प्र॰}}{\text{इ॰}}$ ।

अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

कुङ्कुमस्य सदलं पलद्वयं निष्कसप्तमलवैस्त्रिभिर्यदि ।
प्राप्यते सपदि मे वणिग्वर ! ब्रूहि निष्कनवकेन तत् कियत् ? ॥ १ ॥

हे वणिग्वर ! यदि ($\frac{३}{७}$) निष्क में ($\frac{५}{२}$) पल कुङ्कुम मिलता है, तो ९ निष्क में कितना कुङ्कुम मिलेगा, यह शीघ्र बताओ ।

न्यासः । $\frac{३}{७}$ । $\frac{५}{२}$ । $\frac{९}{१}$ उक्तविधिना लब्धानि कुङ्कुमपलानि ५२ । कर्षौ २ ।

उदाहरण—प्रमाण $\frac{३}{७}$ । प्र·फ = $\frac{५}{२}$ । इच्छा ९ । अब सूत्र के अनुसार—

$$\frac{\text{प्र·फ} \times \text{इ०}}{\text{प्र०}} = \frac{\frac{५}{२} \times \frac{९}{१}}{\frac{३}{७}} = \frac{४५}{२} \div \frac{३}{७} = \frac{४५ \times ७}{२ \times ३} = \frac{३१५}{६} = \frac{१०५}{२} = ५२ + \frac{१}{२} = \text{पल।}$$

अब १ को ४ से गुणा करने पर कर्ष हुआ । इसे २ से भाग दिया तो $\frac{१ \times ४}{२}$ = २ कर्ष ∴ उत्तर = ५२ पल २ कर्ष ।

अन्यः प्रश्नः—

प्रकृष्टकर्पूरपलत्रिषष्ट्या चेल्लभ्यते निष्कचतुष्कयुक्तम् ।
शतं तदा द्वादशभिः सपादैः पलैः किमाचक्ष्व सखे ! विचिन्त्य ॥ २ ॥

हे मित्र ! यदि उत्तम कपूर के ६३ पल में १०४ निष्क मिलते हैं, तो १२ + $\frac{१}{४}$ पल में कितने निष्क मिलेंगे ।

न्यासः । $\frac{६३}{१}$ । $\frac{१०४}{१}$ । $\frac{४९}{४}$ । मध्यमिच्छागुणितं $\frac{५०९६}{१}$ छेदभक्तम् १२७४ आद्येन ६३ हृतं लब्धा निष्काः २० । शेषं १४ षोडशगुणितम् २२४ आद्येन भक्तंजाता द्रम्माः ३ । पणाः ८ । काकिण्यः ३ । वराटकाः ११$\frac{१}{६}$ ।

उदाहरण—इसका गणित मूल में स्पष्ट है ।

अन्यदुदाहरणम् ।

द्रम्मद्वयेन साष्टांशा शालितण्डुलखारिका ।
लभ्या चेत् पणसप्तत्या तत् किं सपदि कथ्यताम् ? ॥ ३ ॥

यदि २ द्रम्म में धान के चावल की $\frac{९}{८}$ खारी मिलती है, तो ७० पण में कितनी खारियाँ मिलेंगी, यह शीघ्र बताओ ।

अत्र प्रमाणसजातीयकरणार्थं द्रम्मद्वयस्य पणीकृतस्य

न्यासः । $\frac{३२}{१}$ । $\frac{९}{८}$ । $\frac{७०}{१}$ लब्धे खार्यौ २ । द्रोणाः ७ । आढकः १ । प्रस्थौ २ ।

उदाहरण—प्र· = २ द्रम्म = ३२ पण । प्र·फ = $\frac{९}{८}$ । इ· = ७० । अब सूत्र

के अनुसार इच्छाफल $= \frac{९}{८} \times \frac{७०}{३२} = \frac{९ \times ३५}{८ \times १६} = \frac{३१५}{१२८} =$ २ खारियाँ। शेष ५९ को १६ से गुणा कर १२८ से भाग देने पर $\frac{५९ \times १६}{१२८} = \frac{५९}{८} =$ ७ द्रोण। शेष ३ को ४ से गुणा कर ८ से भाग देने पर $\frac{३ \times ४}{८} = \frac{३}{२} =$ १ आढक। शेष १ को ४ से गुणा कर २ से भाग देने पर $\frac{१ \times ४}{२} =$ २ प्रस्थ।

इति त्रैराशिकम्।

अथ व्यस्तत्रैराशिकम्।

इच्छावृद्धौ फले ह्रासो ह्रासे वृद्धिः फलस्य तु।
व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः॥ ८॥

यत्र इच्छावृद्धौ फलस्य ह्रासो ह्रासे वा फलस्य वृद्धिस्तत्र व्यस्त त्रैराशिकं स्यात्।

जहाँ इच्छा की वृद्धि में फल की कमी हो, तथा इच्छा की कमी में फल की वृद्धि हो, वहाँ गणितज्ञों को व्यस्त त्रैराशिक जानना चाहिए॥ ८॥

तद्यथा—

जीवानां वयसो मौल्ये तौल्ये वर्णस्य हैमने।
भागहारे च राशीनां व्यस्तं त्रैराशिकं भवेत्॥ १॥

प्राणियों की अवस्था के मूल्य में, अच्छे के साथ बुरे सोने की तौल में और राशियों के भागहार अर्थात् किसी संख्या में विभिन्न भाजकों से भाग देने में व्यस्त त्रैराशिक होता है॥ १॥

उदाहरणम्।

प्राप्नोति चेत् षोड़शवत्सरा स्त्री द्वात्रिंशतं, विंशतिवत्सरा किम्।
द्विधूर्वहो निष्कचतुष्कमुक्षाः प्राप्नोति धूःषटकवहस्तदा किम्?॥ १॥

प्रश्न १—यदि १६ वर्ष की स्त्री ३२ रुपये पाती है, तो २० वर्ष की स्त्री क्या पायेगी।

प्रश्न २—दो धूर वहने वाला बैल यदि ४ निष्क पाता है, तो ६ धूर वहने वाला बैल क्या पायेगा॥ १॥

न्यासः। १६। ३२। २०। लब्धम २५$\frac{३}{५}$।

द्वितीयन्यासः। २। ४। ६। लब्धम् १$\frac{१}{३}$।

उदाहरण—प्रमाण १६। प्रमाण फल ३२। इच्छा २०। प्रश्न में प्राणियों का मूल्य जानना है अतः व्यस्त त्रैराशिक होने के कारण प्रमाण को प्रमाण फल से गुणा कर इच्छा से भाग देने पर इच्छा फल होगा। अब उक्त रीति से इ·फ = $\frac{१६\times३२}{२०} = \frac{४\times३२}{५} = \frac{१२८}{५} = २५\frac{३}{५}$ = उत्तर। दूसरे प्रश्न में प्र· ३, प्र·फ· ४ और इच्छा ९ है अतः इच्छा फल = $\frac{३\times४}{९} = \frac{४}{३} = १\frac{१}{३}$ निष्क।

अन्यः प्रश्नः।

दशवर्णं सुवर्णं चेत् गद्याणकमवाप्यते।
निष्केण तिथिवर्णं तु तदा वद कियन्मितम्?॥ २॥

यदि १ निष्क में १० रुपये भरी बिकने वाला सोना १ गद्याणक मिलता है, तो १५ रुपये भरी वाला सोना कितना मिलेगा॥ २॥

न्यासः १० । १ । १५ लब्धम् $\frac{२}{३}$।

उदाहरण—प्र· १०, प्र·फ· १ और इच्छा १५ है, अतः व्यस्त त्रैराशिक विधि से $\frac{१०\times१}{१५} = \frac{२}{३}$ ग० = इच्छा फल।

राशिभागहरणे उदाहरणम्।

सप्ताढकेन मानेन राशौ सस्यस्य मापिते।
यदि मानशतं जातं तदा पञ्चाढकेन किम्?॥ ३॥

यदि अन्न की राशि को ७ आढक के मान से मापने पर १०० मान होते हैं, तो उसे ५ आढक के मान से नापने पर कितने होंगे। नेपाल में मान शब्द माना नाम से प्रसिद्ध है। वहाँ अभी भी माना की तौल प्रचलित है॥ ३॥

न्यासः। ७ । १०० । ५ लब्धम् १४०।

उदाहरण—प्र· ७, प्र·फ· १०० और इच्छा ५ है अतः व्यस्त त्रैराशिक से इच्छा फल = $\frac{७\times१००}{५} = \frac{७००}{५}$ = १४० माना।

इति व्यस्तत्रैराशिकम्।

परिशिष्ट।

(१) एक ही जाति की दो संख्याओं के बीच जो सम्बन्ध होता है उसे उन राशियों का अनुपात या निष्पत्ति कहते हैं। सजातीय दो संख्याओं की परस्पर तुलना करने पर सम्बन्ध का पता लगता है, जैसे ५ रु० और १५ रु० में तुलना करने पर ५ से १५ तीन गुना है, अतः ५ रु०

और १५ रु० में १ और ३ का सम्बन्ध है। इसलिये ५ रु० और १५ रु० का अनुपात $\frac{१}{३}$ है। इसी तरह १ मन और २५ सेर में ($\frac{४०}{२५}=\frac{८}{५}$) का अनुपात है और १ शि० और २ पें० में ($\frac{१२}{२}=\frac{६}{१}$) का अनुपात है।

उपरोक्त अनुपातों को हम नीचे लिखे तरीके से भी लिख सकते हैं—

यथा $\frac{५}{१५}=\frac{१}{३}$, या ५ : १५ : : १ : ३

$\frac{४०}{२५}=\frac{८}{५}$, या ४० : २५ : : ८ : ५

और $\frac{१२}{२}=\frac{६}{१}$, या १२ : २ : : ६ : १

किसी अनुपात या निष्पत्ति का मान उसकी दोनों राशियों की एक ही संख्या से गुणा या भाग देने से नहीं बदलता।

यथा $\frac{५}{१५}=\frac{१५}{४५}=\frac{३०}{९०}=\frac{१२०}{३६०}=\frac{१}{३}$ आदि।

(२) दो अनुपातों के बीच पहली राशियों के गुणनफल को पहली राशि तथा दूसरी राशियों के गुणनफल को दूसरी राशि बना लेने से सम्मिलित अनुपात (निष्पति) बन जाता है।

यथा १ : ३ और ८ : ५ का सम्मिलित अनुपात $\frac{१\times८}{३\times५}$ = ८ : १५

(३) यदि चार राशियाँ ऐसी हों जिनमें पहली और दूसरी की निष्पत्ति तीसरी और चौथी की निष्पत्ति के समान हो तो इन्हें समानुपाती कहते हैं।

यथा—५, ६, १५, १८ ये चारों राशियाँ समानुपाती हैं, क्योंकि यहाँ ५ : ६ : : १५ : १८ ।

यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो उन चारों को सजातीय होने की आवश्यकता नहीं। उनमें केवल पहली और दूसरी तथा तीसरी और चौथी राशि को सजातीय होना चाहिये, यथा ३ रु०, ५ रु०, १२ मन और २० मन ये चारों राशियाँ समानुपाती हैं क्योंकि यहाँ ३ रु० और ५ रु० की निष्पत्ति १२ मन तथा २० मन की निष्पत्ति के बराबर है।

(४) समानुपात में पहली और चौथी संख्या को अन्त्य राशि तथा दूसरी और तीसरी को मध्य राशि कहते हैं।

यथा—३,४,१५,२० यहाँ ३ और २० अन्त्य राशियाँ तथा ४ और १५ मध्य राशियाँ हैं।

समानुपात में अन्त्य राशियों का गुणनफल मध्य राशियों के गुणनफल के बराबर होता है, यथा ऊपर के उदाहरण में अन्त्य राशियों का गुणनफल ३ × २० = ६०, तथा मध्य राशियों का गुणनफल = ४ × १५ = ६०, दोनों बराबर हैं।

(५) यदि चार राशियाँ समानुपाती हों, तो

पहली : दूसरी : : तीसरी : चौथी

दूसरी : पहली : : चौथी : तीसरी

चौथी : तीसरी : : दूसरी : पहली

यदि चारों राशियाँ सजातीय हों तो

पहली : तीसरी : : दूसरी : चौथी।

(६) यदि तीन राशियाँ ऐसी हों जिनमें पहली और दूसरी की निष्पत्ति, दूसरी और तीसरी की निष्पत्ति के समान हो, तो उन्हें संलग्न समानुपाती कहते हैं। दूसरी राशि को पहली और तीसरी को मध्य समानुपाती तथा तीसरी को पहली और दूसरी को तृतीय समानुपाती कहते हैं।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

निम्नलिखित अनुपातों का सूक्ष्म रूप बताओ।

(१) १५ : १८। ७७ : १२१। २ रु० ८ आ० : १० आ०। १ मन : ५ सेर। ६ पे० : २ शि०। २ पण : १ निष्क।

निम्नलिखित अनुपातों का संलग्न समानुपात बताओ।

(२) २ : ३ और ६ : ७। ११ : १३ और २६ : ३३। ४१ : ८३ और २४९ : ३२८।

इनका मध्यम समानुपाती बताओ।

(३) २ और ८। ३ और २७। ८ और ३२। ४ और १२१।

इनकी तीसरी समानुपाती बताओ।

(४) २$\frac{१}{२}$ और $\frac{१५}{४}$। २१ और $\frac{३५}{३}$। १ पौ० और १५ शि०।

इनकी चौथी समानुपाती राशि बताओ।

(५) १ गज २ गज २ फीट और २ रु० ।
८ एकड़ २४ एकड़ १८ मनुष्य ।
१८० रु० ५०० रु० और १२ पौ० ।

(६) यदि १० चीजों का मूल्य ३०० रु० है, तो १३ चीजों का मूल्य बताओ ।

(७) यदि १५ हल १३५ बीघे खेत को जोतते हैं, तो ८१ हल कितने खेतों को ओतेंगे ।

(८) प्रति घण्टे ३० मील की चाल से बंगाल से पञ्जाब जाने में ४५ घण्टे लगते हैं, तो प्रति घण्टे ३५ मील की चाल से कितना समय लगेगा ।

(९) वृत्त की परिधि और व्यास में २२ : ७ का अनुपात है, तो जब व्यास २८ है तो परिधि बताओ ।

(१०) दो धन की संख्या ३ और ५ की समानुपाती है । यदि उनमें पहली १८ मन हो, तो दूसरी बताओ ।

(११) जब राम ८ रु० कमाता है, श्याम १० रु० कमाता है, और जब श्याम ५ रु०, तब यदु २५ रु० और जब यदु २१ रु० तब मोहन ३९ रु० तो चारों की कमाइयों की तुलना करो ।

(१२) ७७ गैलन मिली हुई वस्तु में दूध और पानी का अनुपात ६ : ५ है, तो उसमें दूध और पानी कितना-कितना है ।

(१३) एक शिकारी ने एक हिरण का पीछा किया । जितनी देर में शिकारी २ छलांग भरता है, हिरण ३ छलांग भरता है, यदि शिकारी की ५ छलांग हरिण के ८ छलांग के समान हो, तो दोनों की चालों की तुलना करो ।

इति त्रैराशिकपरिशिष्टम् ।

अथ पञ्चराशिकादौ करणसूत्रं वृत्तम् ।

पञ्चसप्तनवराशिकादिकेऽन्योन्यपक्षनयनं फलच्छिदाम् ।
संविधाय बहुराशिजे वधे स्वल्पराशिवधभाजिते फलम् ॥ ९ ॥

पञ्च सप्तनवराशिकादिके फलच्छिदां अन्योन्यपक्षनयनं संविधाय बहुराशिजे वधे स्वल्पराशिवधभाजिते फलं स्यात् ।

पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि में फल और हर को परस्पर स्थान परिवर्तन कर, अधिक राशियों के घात में अल्प राशियों के घात से भाग देने पर फल होता है।

उपपत्तिः—पञ्चानां राशीनां ज्ञाने षष्ठस्य ज्ञानं येन विधिना भवति तत्पञ्चराशिकमेवं सप्तराशिकादावपि बोध्यम्।

अत्र कल्प्यते—

प्र·का·	इ·का·
प्र·ध·	इ·ध·
प्र·फ·	

अत्रानुपातेनेष्टफलम् $= \dfrac{\text{प्र·फ·} \times \text{इ·का·}}{\text{प्र·का·}}$ ततोऽन्योऽनुपातः यदि प्रमाणधने-नेदं फलं तदेष्टधनेन किमिति जातमिष्टफलम् $= \dfrac{\text{प्र·फ·इ·का·इ·ध·}}{\text{प्र·का·प्र·ध·}}$ अत उपपन्नम्।

अत्र स्वरूपदर्शनेन स्फुटं ज्ञायते यत्त्रैराशिकद्वयेन पञ्चराशिकमुपपद्यते। सप्तराशिकादीनामुपपत्तिस्तु त्र्यादित्रैराशिकवशेन भवतीति धीरैरवगन्तव्यम्।

उदाहरणम्।

मासे शतस्य यदि पञ्च कलान्तरं स्याद्
वर्षं गते भवति किं वद षोडशानाम्?।
कालं तथा कथय मूलकलान्तराभ्यां
मूलं धनं गणक! कालफले विदित्वा॥ १॥

यदि १ महीने में १०० का ५ सूद होता है, तो १२ महीने में १६ का सूद क्या होगा।

न्यासः। $\begin{array}{c|c|} १ & १२ \\ १०० & १६ \\ ५ & ० \end{array}$ अन्योन्यपक्षनयने न्यासः। $\begin{array}{c|c} १ & १२ \\ १०० & १६ \\ ० & ५ \end{array}$।

बहूनां राशीनां वधः ९६०। अल्प राशिवधेन १०० अनेन भक्ते लब्धम् ९। शेषम् $\frac{६०}{१००}$ विंशत्याऽपवर्त्य $\frac{३}{५}$ जातं कलान्तरम् ९$\frac{३}{५}$। छेद-रूपे कृते जातम् $\frac{४८}{५}$।

अथ कालज्ञानार्थं न्यासः। $\begin{array}{c|c|} १ & ० \\ १०० & १६ \\ ५ & \frac{४८}{५} \end{array}$

अन्योन्यपक्षनयने न्यासः। $\begin{array}{c|c|} १ & ० \\ १०० & १६ \\ ४८ & ५ \\ & ५ \end{array}$

बहूनां राशीनां वधः ४८०० । स्वल्पराशिवधेन ४०० भक्ता लब्धा-मासाः १२ ।

मूलधनार्थं न्यासः ।

१	१२
१००	०
५	४८/५

पूर्ववल्लब्धं मूलधनम् १६ । एवं सर्वत्र ।

उदाहरण—यहाँ प्रश्न के अनुसार प्र० का १ प्र. ध १०० और प्र. फ० ५ हैं । इ. का १२, इ. ध १६ और इच्छाफल ० हैं, यही हर स्थानीय है। अब प्रमाणफल और इष्ट (इच्छाफल) का स्थान आपस में बदल दिया तो— पहला पक्ष = प्र·काल १, प्र धन १०० और इच्छाफल (हर) यह हुआ। दूसरा पक्ष = इ·का·१२, इ·ध·१६ और प्रमाणफल ५ हुआ । इन दोनों पक्षों में दूसरा पक्ष अधिक है अतः इन अधिक राशियों के घात में दूसरे अल्प राशियों के घात से भाग दिया तो—१२ × १६ × ५ ÷ १ × १०० = १२ × ८० ÷ १०० = १२ · ४ ÷ ५ = ४८/५ सूद हुआ ।

समय जानने के लिये न्यास करने पर—

प्र·का १	इ·का ०	फल और हर की जगह	प्र·का १	इ·का ०	
प्र·ध १००	इ·ध १६	आपस में बदलने	प्र·ध १००	इ·ध १६	
प्र·फ ५	इ·फ ४८/५	पर	हर ४८	प्र·फ ५/५	

अब सूत्र के अनुसार—बहुराशि वध = १ × १०० × ४८ अल्प राशि वध = १६ × ५ × ५ । ∴ १ × १०० × ४८ ÷ १६ × ५ × ५ = १०० × ४८ ÷ १६ × २५ = ४८०० ÷ ४०० = १२ = इच्छा काल ।

मूलधन के लिये न्यास—

प्र·का १	इ·का १२	फल और हर की	प्र·का १	इ·का १२
प्र·ध १००	इ·ध ०	जगह बदलने से	प्र·ध १००	इ·ध ०
प्र·फ ५	इ·फ ४८/५		हर ४८	प्र·फ ५/५

अब सूत्र के अनुसार $\frac{\text{बहुराशिवध}}{\text{अल्पराशिवध}} = \frac{१ \times १०० \times ४८}{१ \times ५ \times ५} = १६$ मूलधन

इसी तरह आगे भी समझना चाहिये ।

उदाहरणम् ।

सत्र्यंशमासेन शतस्य चेत् स्यात् कलान्तरं पञ्च सपञ्चमांशाः ।
मासैस्त्रिभिः पञ्चलवाधिकैस्तत् सार्धद्विषष्टेः फलमुच्यतां किम् ? ॥ २ ॥

यदि $1\frac{1}{3}$ महीने में १०० का $5\frac{1}{5}$ सूद होता है, तो $3\frac{1}{5}$ महीने में $62\frac{1}{2}$ का सूद क्या होगा, यह कहो ॥ २ ॥

न्यासः $\left|\begin{array}{c|c} 1\frac{1}{3} & 3\frac{1}{5} \\ 100 & 62\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{5} & 0 \end{array}\right.$ छेदघ्नरूपेष्विति कृते न्यासः $\left|\begin{array}{c|c} \frac{4}{3} & \frac{16}{5} \\ \frac{100}{1} & \frac{125}{2} \\ \frac{26}{5} & 0 \end{array}\right.$

अन्योन्यपक्षनयने न्यासः । $\left|\begin{array}{c|c} 4 & 16 \\ 5 & 3 \\ 100 & 125 \\ 2 & 1 \\ 5 & 26 \end{array}\right.$

तत्र बहुराशिवधः १५६००० स्वल्पराशिवधः २०००० । छेदभक्ते लब्धम् $7\frac{4}{5}$ । छेदघ्नरूपे कृते जातं कलान्तरम् $\frac{39}{5}$ । कालादिज्ञानार्थं पूर्ववत् ।

यद्वा प्रकारान्तरेणास्योदाहरणम् ।

न्यासः $1\frac{1}{3}$ । १०० । $5\frac{1}{5}$ । $3\frac{1}{5}$ । $62\frac{1}{2}$ ।

अत्र सर्वेषां छेदघ्नरूपेषु लवा धनर्णमित्यादिना सवर्णने कृते जातम् $\frac{4}{3}$ । १०० । $\frac{26}{5}$ । $\frac{16}{5}$ । $\frac{125}{2}$ ।

अन्योन्यपक्षनयनेन बहूनां राशीनां $\frac{26}{5}$ । $\frac{125}{2}$ । $\frac{16}{5}$ । वधः $\frac{52000}{50}$ अल्पराश्योः $\frac{4}{3}$ । $\frac{100}{1}$ वधः $\frac{400}{3}$

भागार्थं विपर्ययेण न्यासः $\frac{52000}{50}$ । $\frac{3}{400}$ । अंशाहतिः १५६००० । छेदवधेन २०००० भक्ता जातम् $7\frac{4}{5}$ । छेदघ्नरूपे कृते जातं कलान्तरमिदम् $\frac{39}{5}$ । एवं सर्वत्र ज्ञेयम् ।

उदाहरण—इसका गणित मूल में ही स्पष्ट है ।

अथ सप्तराशिकोदाहरणम् ।

विस्तारे त्रिकराः कराष्टकमिता दैर्घ्ये विचित्राश्च चे-
द्रूपैरुत्कटपट्टसूत्रपटिका अष्टौ लभन्ते शतम् ।
दैर्घ्ये सार्धकरत्रयाऽपरपटी हस्तार्धविस्तारिणी
तादृक् किं लभते ? द्रुतं वद वणिक् ! वाणिज्यकं वेत्सि चेत् ॥

हे वणिक् ! यदि तुम व्यापार जानते हो, तो सुन्दर रेशम की विचित्र रूपवाली ३ हाथ चौड़ी और ८ हाथ लम्बी ८ दुपट्टियाँ (चादरें) १०० निष्क

में मिलती हैं, तो $३\frac{१}{२}$ हाथ लम्बी और $\frac{१}{२}$ हाथ चौड़ी उसी तरह की १ दुपट्टी कितने में मिलेगी। यह शीघ्र बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । $\begin{array}{cc} ३ & \\ ८ & \frac{१}{२} \\ ८ & १ \\ १०० & \end{array}$ | लब्धो निष्कः ० । द्रम्माः १४ । पाणाः ९ । काकिणी १ । वराटकाः $६\frac{२}{३}$ ।

उदाहरण—यहाँ पहले की तरह पक्षनयन करने से प्रमाण का पक्ष = ३, ८, ८, ० । इच्छा का पक्ष = $\frac{७}{२}$, $\frac{१}{२}$, १, १०० । अब वहुराशि के घात में अल्पराशि के घात से भाग देने पर $\frac{७\times१\times१\times१००}{३\times८\times८\times२\times२} = \frac{१७५}{१९२}$ = ० निष्क। शेष १७५ को १६ से गुणा कर १९२ से भाग दिया तो $\frac{१७५\times१६}{१९२} = \frac{१७५}{१२}$ = १४ द्रम्म । शेष ७ को १६ से गुणा १९ से भाग दिया तो $\frac{७\times१६}{१२} = \frac{७\times४}{३} = \frac{२८}{३}$ = ९ पण, शेष १ को ४ से गुणा कर ३ से भाग देने पर $\frac{४\times१}{३} = \frac{४}{३}$ = १ काकिणी । शेष १ को २० से गुणा कर ३ से भाग दिया तो $\frac{२०}{३} = ६\frac{२}{३}$ वराटक ।

अथ नवराशिकोदाहरणम् ।

पिण्डे येऽर्कमिताङ्गुलाः किल चतुर्वर्गाङ्गुला विस्तृतौ
पट्टा दीर्घतया चतुर्दशकरास्त्रिंशल्लभन्ते शतम् ।
एता विस्तृतिपिण्डदैर्घ्यमितयो येषां चतुर्वर्जिताः
पट्टास्ते वद मे चतुर्दश सखे! मूल्यं लभन्ते कियत् ? ॥ १ ॥

हे मित्र ! १२ अंगुल मोटाई १६ अंगुल चौड़ाई और १४ हाथ लम्बाई वाले ३० पट्टे का मूल्य १०० निष्क है, तो ८ अंगुल मोटाई १२ अंगुल चौड़ाई और १० हाथ लम्बाई वाले १४ पट्टे का मूल्य बताओ ॥ १ ॥

न्यासः $\begin{array}{cc} १२ & ८ \\ १६ & १२ \\ १४ & १० \\ ३० & १४ \\ १०० & ० \end{array}$ | लब्धं मूल्यं निष्काः । $१६\frac{२}{३}$ ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार फल का पक्ष परिवर्तन करने से बहुराशि घात = ८ × १२ × १० × १४ × १०० । अल्प राशि घात = १२ × १६ × १४ × ३० । $\therefore \frac{८\times१२\times१०\times१४\times१००}{१२\times१६\times१४\times३०} = \frac{५०}{३} = १६\frac{२}{३}$ निष्क ।

अथैकादशराशिकोदाहरणम् ।

पट्टा ये प्रथमोदितप्रमितयो गव्यूतिमात्रे स्थिता-
स्तेषामानयनाय चेच्छकटिनां द्रम्माष्टकं भाटकम् ।

अन्ये ये तदनन्तरं निगदिता माने चतुर्वर्जिता-
स्तेषां का भवतीति भाटकमिति गव्यूतिषट्के वद ॥ १ ॥

एक गव्यूति (२ कोस) पर स्थित पहले (१२ अंगुल मोटी १६ अंगुल चौड़ी और १४ हाथ लम्बी) कहे हुये ३० पट्टे को लाने में गाड़ीवाले को ८ द्रम्म भाड़ा दिया जाता है, तो उसके बाद कहे हुये ४ कम मान वाले (८ अं० मो० १२ अं० चौ० और १० हाथ लम्बा) १४ पट्टे को छे गव्यूति (१२ कोस) से लाने में क्या भाड़ा लगेगा, यह बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । $\begin{array}{cc} १२ & ८ \\ १६ & १२ \\ १४ & १० \\ ३० & १४ \\ \frac{१}{८} & ६० \end{array}$ लब्धे भाटके द्रम्माः ८ ।

उदाहरण—न्यास मूल में स्पष्ट है। यहाँ केवल फल का परिवर्तन कर लिखने से प्रमाण पक्ष में अल्पराशि वध = १२ × १६ × १४ × ३० × १ । इच्छा पक्ष में बहुराशि वध = ८ × १२ × १० × १४ × ६ × ८ । ∴ बहुराशि के घात में अल्प राशि के घात से भाग देने पर लब्धि ८ द्रम्म

$= \frac{८ \times १२ \times १० \times १४ \times ६ \times ८}{१२ \times १६ \times १४ \times ३० \times १}$ ।

अथ भाण्डप्रतिभाण्डके करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

तथैव भाण्डप्रतिभाण्डकेऽपि विपर्ययस्तत्र सदा हि मूल्ये ।

भाण्डप्रतिभाण्ड में भी अर्थात् विभिन्न वस्तुओं के बदले में भी उसी तरह फल और हरों को परिवर्तन कर विशेष में मूल्य का भी परिवर्तन करना चाहिये। बाद में बहुराशि के घात में अल्प राशि के घात से भाग देने पर फल होता है।

यथा—किसी ने प्रश्न किया कि—१ रु० में २ सेर गेहूँ और ४ रु० में ५ सेर चावल मिलता है तो १ सेर गेहूँ के बदले चावल कितना होगा ?

उत्तर—यहाँ प्रश्न के अनुसार न्यास किया, तो प्रमाण पक्ष में—१, २, १, हुये। इच्छा पक्ष में—४, ५, हुये। अब मूल्य और फल को परस्पर परिवर्तन किया तो—प्रमाण पक्ष = २,४, इच्छा पक्ष = ५, १, १। अब बहुराशिवध ५ × १ × १ = ५ में २ × ४ = ८ का भाग दिया तो—$\frac{५}{८}$ उत्तर आया।

उपपत्तिः—प्र० मू० । प्र० फ० । प्र० इ० । द्वि० मू० । द्वि० फ० । द्वि० इ० ।

अत्रानुपातः—यदि प्रथममूल्येन प्रथमफलं तदा द्वितीयमूल्येन किमिति द्वितीयमूल्यसम्बन्धि-फलम् $= \dfrac{\text{प्र· फ·} + \text{द्वि· मू·}}{\text{प्र· मू·}}$ । पुनरनुपातः—यद्यनेन (विनिमयेन) द्वितीयफलं तदा प्रथमेष्टेन किमिति जातं द्वितीयेष्टम्

$$= \dfrac{\text{द्वि· फ·} \times \text{प्र· इ·}}{\dfrac{\text{प्र· फ·} \times \text{द्वि· मू·}}{\text{प्र· मू·}}} = \dfrac{\text{प्र· मू·} \times \text{प्र· इ·} \times \text{द्वि· फ·}}{\text{प्र· फ·} \times \text{द्वि· मू·}}$$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

द्रम्मेण लभ्यत इहाम्रशतत्रयं चेत्
त्रिंशत् पणेन विपणौ वरदाडिमानि ।
आम्रैर्वदाशु दशभिः कति दाडिमानि
लभ्यानि तद्विनिमयेन भवन्ति मित्र ! ।। १ ।।

हे मित्र ! १ द्रम्म में ३०० आम और १ पण में ३० दाडिम मिलते हैं, तो १० आम के बदले कितने दाडिम मिलेंगे, यह शीघ्र बताओ ।

न्यासः । $\begin{array}{c} १६ \\ ३०० \\ १० \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} १ \\ ३० \end{array}$ । लब्धानि दाडिमानि १६ ।

उदाहरण—यहाँ द्रम्म को पण बनाकर मूल में न्यास किया गया है। पक्षनयन करने से बहुराशि वध $= १६ \times ३० \times १०$ । अल्पराशि वध $=$ १×३०० । $\therefore$ भाग देने पर फल $= \dfrac{१६ \times ३० \times १०}{१ \times ३००} = \dfrac{१६ \times ३० \times १}{१ \times ३०}$ $= १६$ दाडिम ।

इति लीलावत्यां प्रकीर्णकानि ।

परिशिष्ट ।

ऐकिक नियम ।

एक चीज के मूल्य, तौल या लम्बाई आदि जानकर अनेक चीजों के मूल्य, तौल या लम्बाई आदि, तथा अनेक चीजों के मूल्य तौल या लम्बाई आदि जानकर एक चीज के मूल्य, तौल या लम्बाई आदि जानने की विधि को ऐकिक नियम कहते हैं । भाग या गुणा के द्वारा ऐकिक नियम की क्रिया होती है । यथा—

(१) यदि १ गाय की कीमत १५ रु० है, तो ५ गाय की कीमत निकालना है, तो यहाँ गुणा के द्वारा क्रिया होगी।

लिखने की विधि यह है—∵ १ गाय का मूल्य १५ रु० है।

∴ ५ गाय का मूल्य १५ × ५ = ७५ रु०।

उत्तर = ७५ रु०।

(२) यदि २० मन चावल का मूल्य २१ पौण्ड है, तो ४ मन चावल का मूल्य बताओ। उत्तर—

∵ २० मन चावल का मूल्य २१ पौण्ड है।

∵ १ मन चावल का मूल्य $\frac{२०}{२१}$ पौण्ड होगा।

∵ ४ मन चावल का मूल्य $\frac{२१ \times ४}{२०}$ होगा।

∵ $\frac{२१ \times ४}{२०} = \frac{२१}{५} =$ ४ पौण्ड। शेष १ × २० = २० शि०।

∵ $\frac{२०}{५} =$ ४ शि०। ∴ उत्तर = ४ पौ० ४ शि०।

यहाँ पहले भाग तब गुणा के द्वारा क्रिया की गयी है।

(३) यदि १ मनुष्य १ काम को १५ दिन में कर सकता है, तो उसी काम को ३ मनुष्य कितने दिन में कर सकते हैं?

∵ १ मनुष्य १ काम को १५ दिन में करता है।

∴ ३ मनुष्य उसी काम को $\frac{१५}{३} =$ ५ दिन में कर सकते हैं।

(४) यदि १२ मनुष्य १ काम को ५ दिन में पूरा करें, तो १ मनुष्य कितने दिन में करेगा?

∵ १२ मनुष्य १ काम को ५ दिन में पूरा करते हैं।

∴ १ मनुष्य उसी काम को १२ × ५ = ६० दिन में करेंगे।

(५) यदि ३ मन चावल ९ आदमियों के लिये ३० दिन के हों, तो १ आदमी के लिए वह कितने दिनों के होंगे?

∵ ३ मन चावल ९ आदमियों के लिए ३० दिन के हैं।

∴ ३ मन चावल १ आदमी के लिए ९ × ३० = २७० दिन के हैं।

(६) यदि ६ गज कपड़ा ८ रु० ४ आ० का हो, तो २५ गज कितने का होगा?

∵ ६ गज का मोल = ८ रु० ४ आ०।

∴ १ गज का मोल = ८ रु० ४ आ० $\times \frac{१}{६}$।

∴ २५ गज का मोल = ८ रु० ४ आ० $\times \frac{२५}{६} =$ ३४ रु० ६ आ०, उत्तर।

(७) जब ८ मन गेहूँ का मोल ७४ रु० हो, तब १७ मन का दाम बताओ ?

$\because$ ८ मन गेहूँ का मोल = ७४ रु० ।

$\therefore$ १ मन गेहूँ का मोल = ७४ रु० $\times \frac{१}{८}$ ।

$\therefore$ १७ मन गेहूँ का मोल = ७४ रु० $\frac{\times १७}{८}$ = १५७ रु० ४ आ० ।

(८) यदि ६ सेर चीनी ७ रु० ८ आ० में मिलती हो, तो १२ रु० ८ आ० में कितनी मिलेगी ?

$\because$ ७ रु० ८ आ० = १२० आ० $\therefore$ १२ रु० ८ आ० = २०० आ० ।

$\because$ १२० आ० मोल = ६ सेर, $\therefore$ ४० आ० मोल = २ सेर ।

$\therefore$ २०० आ० मोल = १० सेर । उत्तर ।

(९) किसी वस्तु के $\frac{३}{४}$ का मोल ९० रु० है, तो उसके $\frac{२}{३}$ का क्या मोल होगा ?

$\because$ वस्तु के $\frac{३}{४}$ का मूल्य ९० है $\therefore$ वस्तु का मूल्य = ९० $\times \frac{४}{३}$ ।

$\therefore$ वस्तु के $\frac{२}{३}$ का मूल्य = ९० रु० $\times \frac{४}{३} \times \frac{२}{३}$ = ८० रु० ।

(१०) किसी काम को ३५ मनुष्य ८ दिन में पूरा करते हैं, तो उसी काम को १० दिन में कितने मनुष्य पूरा करेंगे ?

$\because$ ८ दिन में उस काम को ३५ मनुष्य पूरा करते हैं ।

$\therefore$ २ दिन में उस काम को ३५ $\times$ ४ मनुष्य करते हैं ।

$\therefore$ १० दिन में उस काम को $\frac{३५ \times ४}{५}$ = २८ मनुष्य करेंगे ।

(११) किसी सेठ ने १२०० छात्रों को खाने का सामान विद्यालय में ६० दिन के लिए भेजा । १५ दिन के बाद ३०० छात्र कम हो गये, तो बताओ शेष सामान शेष छात्रों के लिए कितने दिन के हुए ? शेष सामान १२०० छात्रों को ४५ दिन के लिए होगा ।

$\therefore$ शेष सामान ३०० छात्रों को (४५ $\times$ ४) दिन के होगा ।

$\therefore$ शेष सामान ९०० छात्रों को $\frac{४५ \times ४}{३}$ दिन के लिए होगा ।

(१२) एक गढ़ में १००० मनुष्यों के लिए ७० दिन की सामग्री उपस्थित थी, जिसमें २० दिन के बाद २०० मनुष्य और बढ़ा दिये गये, तो शेष सामग्री कितने दिन के लिये हुई ।

शेष सामान १००० मनुष्यों के लिये ५० दिन के लिये होगा ।

∴ १२०० मनुष्यों के लिये—$\frac{५० \times १०००}{१२००} = ४१ + \frac{२}{३}$ ।

(१३) यदि ८ बैल या ६ घोड़े एक खेत की घास को १० दिन में खा लेवें, तो ५ बैल और ४ घोड़े उसी खेत की घास को कितने दिनों में खा लेंगे ।

∵ ८ बैल उतनी ही घास खाते हैं जितना ६ घोड़े ।

∴ १ " " " खाते हैं " $\frac{६}{८}$ घोड़े ।

∴ ५ " " " खाते हैं " $\frac{६ \times ५}{८} = \frac{१५}{४}$ घोड़े ।

∴ ५ बैल और ४ घोड़े उतनी ही घास खाते हैं जितनी $\left(\frac{१५}{४} + ४\right)$ घोड़े $= \frac{३१}{४}$ ।

अब ∵ ६ घोड़े उस घास को १० दिन में खाते हैं ∴ १ घोड़ा उस घास को $१० \times ६ = ६०$ दिन में खावेगा ।

∴ $\frac{३१}{४}$ घोड़े उस घास को $\frac{१० \times ६ \times ४}{३१} = ७\frac{२३}{३१}$ दिन में खावेंगे ।

(१४) यदि राम एक काम को ७ दिन में करता है और मोहन ९ दिन में, तो दोनों मिलकर उस काम को कितने दिन में करेंगे ?

∵ राम १ काम को ७ दिन में करता है ∴ उस काम का $\frac{१}{७}$, १ दिन में करेगा । मोहन उसी काम को ९ दिन में करता है ∴ उस काम का $\frac{१}{९}$, १ दिन में करेगा ।

∴ राम और मोहन उस काम के $\left(\frac{१}{७} + \frac{१}{९}\right)$ को १ दिन में कर सकते हैं । परन्तु $\frac{१}{७} + \frac{१}{९} = \frac{१६}{६३}$, ∴ कुल काम को वे दोनों $\frac{६३}{१६}$ दिन में कर सकते हैं ।

(१५) राम १ काम को १० घण्टे में और श्याम उसी काम को ८ घण्टे में करता है, तो दोनों मिलकर कितने घण्टे में कर सकते हैं ?

∵ राम १ काम को १० घण्टे में करता है ∴ १ घण्टा में उसी काम का $\frac{१}{१०}$ करेगा । श्याम भी उसी काम का $\frac{१}{८}$, १ घण्टा में करेगा । ∴ दोनों उस काम के $\left(\frac{१}{१०} + \frac{१}{८}\right)$ को १ घण्टा में करेंगे । ∴ कुल काम को वे लोग $\frac{८०}{१८} = \frac{४०}{९} = ४\frac{४}{९}$ घण्टे में करेंगे ।

(१६) यदि १ काम को क ४ दिन में, ख ५ दिन में और ग ६ दिन में कर लेता है, तो वे कुल मिलकर उस काम को कितने दिनों में कर सकते हैं ?

तदा मिश्रधनेन किमिति जातमिष्ट-कलान्तरम् $= \dfrac{\text{प्र० फ०} \times \text{मि० का०}}{\text{प्र० का०}}$

$$\times \dfrac{\text{मि० ध०}}{\dfrac{\text{प्र० का०} \times \text{प्र० ध०} + \text{मि० का०} \times \text{प्र० फ०}}{\text{प्र० का०}}}$$

$$= \dfrac{\text{प्र० फ०} \times \text{मि० का०} \times \text{मि० ध०} \times \text{प्र० का०}}{\text{प्र० का०} \left(\text{प्र० का०} \times \text{प्र० ध०} + \text{मि० का०} \times \text{प्र० फ०}\right)}$$

$= \dfrac{\text{प्र० फ०} \times \text{मि० का०} \times \text{मि० ध०}}{\text{प्र० का०} \times \text{प्र० ध०} + \text{मि० का} \times \text{प्र० फ०}}$ अत उपपन्नः प्रथमः प्रकारः ।

वा—मूलधनं = इ । तदा पञ्चराशिकेनेष्टसम्बन्धीय-कलान्तरमानीय तेन युतमिष्टं जातं सकलान्तरधनम् = स० ध० । ततोऽनुपातेन मूलधनम् = $\dfrac{\text{इ०} \times \text{मि० ध०}}{\text{स० ध०}}$ । अस्माद्विहीनं मिश्रधनं कलान्तरं भवतीति सर्वमुपपन्नम् ।

उद्देशकः ।

पञ्चकेन शतेनाब्दे मूलं स्वं सकलान्तरम् ।
सहस्रं चेत् पृथक् तत्र वद मूलकलान्तरे ॥ १ ॥

यदि ५ रु० सैकड़ा मासिक सूद की दर से १ वर्ष में सूद से युत मूलधन अर्थात् मिश्रधन १००० होता है, तो मूलधन और सूद अलग-अलग बताओ ।

न्यासः । $\begin{array}{c} १ \\ १०० \\ ५ \end{array} \Big| \begin{array}{c} १२ \\ १००० \\ ० \end{array}$ लब्धे क्रमेण मूलकलान्तरे ६२५ । ३७५,

अथवेष्टकर्मणा कल्पितमिष्टं रूपम् १ । उद्देशकालापवदिष्टराशिरित्यादिकरणेन रूपस्य वर्षे कलान्तरम् $\frac{३}{५}$ । एतद्युतेन रूपेण $\frac{८}{५}$ । इष्टे १००० रूपगुणे भक्ते लब्धं मूलधनम् ६२५ । एतन्मिश्रात् १००० च्युतं कलान्तरम् ३७५ ।

उदाहरण—यहाँ प्र० ध० = १०० । प्र० का० = १ । प्र० फ० = ५ । मिश्रकाल = १२ मा० । मिश्रधन = १००० । अब सूत्र के अनुसार प्रमाणधन १०० को प्रमाण काल १ से गुणा करने पर १०० × १ = १०० हुआ । फल ५ को मिश्रकाल १२ से गुणा करने से ५ × १२ = ६० हुआ । इन दोनों को मिश्रधन १००० से गुणाकर दोनों के योग (१०० + ६० = १६०) से भाग

देने पर क्रम से मूलधन = $\frac{100\times1000}{160}$ = २५ × २५ = ६२५ । तथा सूद = $\frac{60\times1000}{160}$ = १५ × २५ = ३७५ ।

अथवा इष्ट = १, अब त्रैराशिक से—

∵ १०० रु० का १ मास में ५ रु० सूद होता है ।

∴ १ रु० का १ मास में $\frac{5}{100}$ रु० सूद होगा ।

∴ १ रु० का १२ मास में $\frac{5\times12}{100} = \frac{3}{5}$ रु० सूद होगा ।

∴ १ रु० का मिश्रधन = १ + $\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ रु० । अब अनुपात करने से

∵ $\frac{8}{5}$ रु० मिश्रधन १ रु० मूलधन पर होता है ।

∴ ८ रु० मिश्रधन ५ रु० मूलधन पर होगा ।

∴ १ रु० मिश्रधन $\frac{5}{8}$ रु० मूलधन पर होगा ।

∴ १००० रु० मिश्रधन $\frac{5\times1000}{8\times1}$ रु० मूलधन पर होगा ।

$\frac{\times1000}{8}$ = ५ × १२५ = ६२५ रु० = मूलधन ।

∴ सूद = मिश्रधन−मूलधन = १००० − ६२५ = ३७५ ।

वा—१ इष्ट पर से उक्त विधि द्वारा १ रु० का मिश्रधन = $\frac{8}{5}$ । अब इष्ट १ को इष्ट १००० से गुणा किया तो १००० हुआ । इसे $\frac{8}{5}$ से भाग देने पर मूलधन आया = $\frac{1000\times5}{8}$ = ६२५ । ∴ सूद = १००० − ६२५=३७५ ।

परिशिष्ट ।

(१) किसी वस्तु के फी सैकड़े की जो दर हो, उसे प्रतिशतक कहते हैं । यथा—यदि १०० आम का ८ रु० मूल्य हो तो फी सैकड़े आम की दर = ८ रु० है । इसी तरह यदि ६ रु० में ८ आ० कमीशन मिलते हैं तो प्रतिशतक कमीशन = $\frac{8\times100}{6} = \frac{400}{3}$ आ० $= \frac{400}{3\times16} = \frac{400}{48}$ = रु० = ८ रु० ५ आ० ४ पा० । प्रतिशतक को % इस चिह्न से सूचित किया जाता है ।

(२) जिस भिन्न को प्रतिशतक में लिखना हो, उसे १०० से गुणा करने पर जो हो, वह प्रतिशतक होगा । यथा—$\frac{1}{2}$ का प्रतिशतक = $\frac{1\times100}{2}$ = ५० ।

(३) किसी प्रतिशतक को भिन्न में प्रकट करने के लिये उसे १०० से भाग देना चाहिये । यथा—५ प्रतिशत = $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ ।

(४) किसी संख्या का दिया हुआ प्रतिशत निकालने के लिये उस संख्या को दिया हुआ प्रतिशत से गुणा कर १०० से भाग देना चाहिये। यथा—६० का ३ प्रतिशत $= \frac{६० \times ३}{१००} = \frac{३ \times ३}{५} = \frac{९}{५}$ ।

(५) किसी दी हुई संख्या को दूसरी दी हुई संख्या के प्रतिशतक में प्रकट करने के लिये उस संख्या को १०० से गुणा कर दूसरी संख्या से भाग देना चाहिये। यथा—१३ रु० को ६५ रु० के प्रतिशतक में प्रकट करना है, तो $\frac{१३ \times १००}{६५} = २०\%$ ।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

(१) $\frac{१}{२५}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{२}$ इनको प्रतिशतक में लिखो।

(२) किसी एजेण्ट को प्रतिशतक $१\frac{१}{२}$ कमीशन मिलता है तो ९६५२ रु० ८ आ० में उसे कितना कमीशन मिलेगा।

(३) किसी दलाल को प्रति सैकड़ा १० मिलता है, तो २५२५ रु० १२ आ० में उसे कितनी दलाली मिलेगी।

(४) किसी व्यक्ति को १ जमीन खरीदने में ४ प्रति सैकड़ा दलाली तथा जमीन का दाम मिलाकर १०००० रु० देना पड़ता है, तो जमीन का दाम बताओ।

(५) प्रति सैकड़ा १० रु० मिलने वाले एजेण्ट को २५२५ रु० १५ आ० १० पा० सामान खरीदने के लिये मिला, तो उसने कितने का सामान खरीदा और उसको कितना कमीशन मिला।

व्याज (सूद)।

(१) व्याज दो तरह के होते हैं, जो केवल मूलधन पर लगाया जाता है उसे साधारण व्याज कहते हैं। दूसरा वह है जो किसी निश्चित समय के बाद मूलधन में सूद को जोड़ कर उस पर फिर सूद लगाया जाता है। इसे सूद-दरसूद या चक्रवृद्धि सूद (व्याज) कहते हैं।

यथा—६२५ रु० का ३ वर्ष में सैकड़े २५ रु० वार्षिक सूद की दर से चक्रवृद्धि व्याज निकालना है, जब कि सूद प्रतिवर्ष जोड़ा जाता है।

$\because$ १०० रु० का १ वर्ष में २५ रु० सूद होता है।

$\therefore$ १ रु० ,, ,, ,, $\frac{२५}{१००}$ रु० ,, होगा।

$\therefore$ ६२५ रु० " " " $\frac{६२५\times२५}{१००}$ = १५६ रु० ४ आ० ।

$\therefore$ १ वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ६२५ + १५६ रु० ४ आ० = ७८१ रु० ४ आ० १ वर्ष का । अब इसका १ वर्ष में — $\frac{२५}{१००}\times(७८१+\frac{१}{४})$ $=\frac{१}{४}\times(७८१+\frac{१}{४})=\frac{३१२५}{१६}$ = १९४ रु० १ आ० सूद होगा ।

$\therefore$ दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = ७८१ रु० ४ आ० + १९४ रु० १ आ० = ९७५ रु० ५ आ० । अब फिर इसका १ वर्ष में सैकड़े २५ रु० की दर से = $(९७५+\frac{५}{१६})\times\frac{१}{४}$ रु० = $\frac{१५६०५}{६४}$ रु० = २४३ रु० १३ आ० ३ पा० ।

$\therefore$ तीसरे वर्ष में मिश्रधन = ९७५ रु० ५ आ० + २४३ रु० १३ आ० ३ पा० = १२१९ रु० २ आ० ३ पा० ।

$\therefore$ प्रारम्भिक मूलधन = ६२५ रु० । चक्रवृद्धि ब्याज = ५९४ रु० २ आ० ३ पा० उत्तर ।

साधारण सूद का उदाहरण ।

(२) ६५ रु० का ९ महीने में प्रति रुपये १ + $\frac{१}{२}$ आ० महीने की दर से साधारण ब्याज क्या होगा ।

$\because$ १ रु० का १ महीने में $\frac{३}{२}$ आ० सूद होता है ।

$\therefore$ ६५ रु० का १ महीने में $\frac{३}{२}\times$ ६५ आ० सूद होगा ।

$\therefore$ ६५ रु० का ९ महीने में $\frac{३\times६५\times९}{२}=\frac{१७५५}{२}$ आ० $=\frac{१७५५}{२\times१६}$ रु० = ५४ रु० १३ आ० ६ पा० = उत्तर ।

(३) ९३५ रु० का ४ वर्ष में ५ रु० सैकड़ा वार्षिक सूद की दर से सूद बताओ ।

यहाँ ५ प्रतिशत प्रतिवर्ष सूद है अतः ४ वर्षों के लिए (५ × ४) = २० प्रतिशत हुआ । इस हेतु ९३५ रु० का साधारण ब्याज = $\frac{९३५\times२०}{१००}$ = १८७ रु० । इसी तरह अनेक प्रकार से उत्तर लाना चाहिये ।

(४) मूलधन, सूद, समय और सूद की दर ये चारों नीचे दिये हुए सूत्र के द्वारा सम्बन्धित हैं, जिसके प्रयोग से बड़ी सुविधा होती है ।

यदि संक्षेप में मूलधन = मू०, सूद = सू० । समय = स० । दर

प्रतिशत = द० । तो $सू० = \frac{मू० \times द० \times स०}{१००}$ ।

$\therefore$ $मू० = \frac{सू० \times १००}{द० \times स०}$ । एवं $द० = \frac{सू० \times १००}{मू० \times स०}$ ।

$स = \frac{सू०००१ \times}{मू० \times द०}$ ।

(५) एवं—यदि मिश्रधन = मि० । परन्तु मि० = मू० + सू० ।

$= मू + \left(\frac{मू० \times द० \times स०}{१००}\right)$ । इन पाँचों राशियों में किन्हीं ३ के ज्ञान से चौथी राशि आसानी से निकाली जा सकती है ।

उदाहरण—३ प्रतिशत की दर से ९ वर्ष का ८५० पौ० पर साधारण सूद क्या होगा ।

यहाँ मू = ८५० पौ० । समय = स = ९ वर्ष । दर = द = ३ ।

$\therefore$ $सू० = \frac{मू \times द \times स}{१००} = \frac{८५० \times ३ \times ९}{१००} = \frac{४५९}{२} = २२९$ पौ० १० शि० = उत्तर ।

(६) ५ प्रतिशत की दर से कितने समय में ६२५ रु० का सूद १५०० रु० होगा।

यहाँ मू = ६२५ । द० = ५ । सू० = १५०० अब सूत्र के अनुसार

$स० = \frac{सू \times १००}{मू \times द०} = \frac{१०० \times १५००}{६२५ \times ५} = ४ \times १२ = ४८$

(७) कितने प्रतिशत की दर से ५३५० पौ० का मिश्रधन ७३ दिनों में ५३९२ पौ० १६ शि० हो जायगा ।

यहाँ मू = ५३५०, मि० = ५३९२ $\frac{४}{५}$ $\therefore$ सू० = ५३९२$\frac{४}{५}$—५३५० = ४२$\frac{४}{५}$ = $\frac{२१४}{५}$ । स० = $\frac{७३}{३६५}$ व० = $\frac{१}{५}$ ।

$\therefore$ $द० = \frac{१०० \times सू}{मू \times स} = \frac{१०० \times २१४ \times ५}{५ \times ५३५० \times १} = ४$ प्रतिशत ।

वि०—सूद की दर रुपये में तथा समय वर्ष में लाकर उपरोक्त सूत्रों का प्रयोग होता है । यदि सूद की दर तथा समय दूसरे प्रकार के हों, तो नीचे के प्रकार से सूद, मिश्रधन, मूलधन और सूद की दर निकालना चाहिये ।

(८) ५०० रु० का १२ वर्ष में ९ पा० प्रतिमास प्रतिरुपये की दर से साधारण सूद बताओ।

∵ १ रु० का १ मास में ९ पा० सूद होता है—

∴ ५०० रु० का १ मास में ९ × ५०० पा० सूद होगा।

∴ $\frac{९ \times ५०० }{१२ \times १६}$ रु० = $\frac{३ \times १२५}{१६}$ = $\frac{३७५}{१६}$ = २३ रु० ७ आ०।

(९) ८४२ रु० का ३ रु० सैकड़े सूद की दर से ७ वर्ष में मिश्रधन बताओ।

∵ १०० रु० का १ वर्ष में ३ रु० सूद होता है—

∴ १०० रु० का ७ वर्ष में ३ × ७ रु० सूद होगा।

∴ १०० रु० का ७ वर्ष में मिश्रधन = १०० + २१ = १२१ रु०।

∴ १ रु० का ७ वर्ष में मिश्रधन = $\frac{१२१}{१००}$ रु०।

∴ ८४२ रु० का ७ वर्ष में मिश्रधन = $\frac{१२१ \times ८४२}{१००}$

= $\frac{१२१ \times ४२१}{५०}$ = $\frac{५०९४१}{५०}$ = १०१८$\frac{४१}{५०}$ रु० = उत्तर।

(१०) ४ रु० सैकड़े सूद की दर से कितना रु० ५ वर्ष में ११३४ रु० हो जायगा।

∵ १०० रु० का १ वर्ष में ४ रु० सूद होता है।

∴ १०० रु० का ५ वर्ष में ४ × ५ = २० रु० सूद होगा।

∴ ५ वर्ष में १०० का मिश्रधन = १२० रु०।

∵ १२० रु० मिश्रधन १०० रु० पर होता है

∴ १ रु० मिश्रधन $\frac{१००}{१२०}$ रु० पर होगा।

∴ ११३४ रु० मिश्रधन $\frac{१०० \times ११३४}{१२०}$ = $\frac{५ \times ११३४}{६}$ रु०

= ५ × १८९ = ९४५ रु० = उत्तर।

चक्रवृद्धि व्याज के उदाहरण।

(१) ३ रु० सैकड़ा ब्याज की दर से चक्रवृद्धि के द्वारा ५ वर्ष का ३०० रु० का मिश्रधन बताओ।

∵ १ वर्ष के बाद १०० रु० का मिश्रधन १०३ रु० होता है।

∴ १ वर्ष के बाद १ रु० का मिश्रधन = $\frac{१०३}{१००}$ रु० होगा।

∴ १ वर्ष के बाद किसी मूलधन का मिश्रधन = उस धन के $\frac{१०३}{१००}$ रु०

और २ वर्ष के बाद किसी मूलधन का मिश्रधन = पहले वर्ष वाले

मिश्रधन के $\frac{१०३}{१००}$ = उस मूलधन के $\frac{१०३}{१००} \times \frac{१०३}{१००}$ = उस मूलधन के $\times \left(\frac{१०३}{१००}\right)^{२}$ । इस तरह ३ वर्ष के बाद किसी मूलधन का मिश्रधन = उस मूलधन के $\left(\frac{१०३}{१००}\right)^{३}$ इसी तरह आगे भी समझना चाहिये ।

∴ १०० रु० का ५ वर्ष में मिश्रधन जानने के लिये हम १०० रु० को $(१०३)^{५}$ से गुणाकर गुणनफल को $(१००)^{५}$ से भाग देते हैं ।

$$\therefore \frac{३०० \times १०३ \times १०३ \times १०३ \times १०३ \times १०३}{१००००००००००} = \frac{३ \times १०३^{५}}{(१००)^{५}}$$

= १४७००७८२२२२२९ = ५ वर्ष में मिश्रधन ।

प्रश्नान्तर—

(२) ७५० रु० का ३ वर्ष में $४\frac{१}{२}$ रु० सैकड़ा ब्याज की दर से चक्रवृद्धि लगाकर मिश्रधन बताओ ।

(३) ४०० रु० पर ५ वर्ष में ३ रु० सैकड़ा ब्याज की दर से जो चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज हो उनका अंतर बताओ ।

(४) कितना धन चक्रवृद्धि पर ४ पौ० सैकड़े ब्याज की दर से २ वर्ष में २७० पौ० ८ शि० मिश्रधन हो जाय ।

(५) ४ रु० सैकड़ा ब्याज की दर से २ वर्ष में किसी धन पर जो चक्रवृद्धि और साधारण ब्याज मिलते हैं । उनका अंतर १ रु० है तो वह कौन सा धन है ।

मिश्रान्तरे करणसूत्रम् ।

अथ प्रमाणैर्गुणिताः स्वकाला व्यतीतकालघ्नफलोद्धृतास्ते । स्वयोगभक्ताश्च विमिश्रनिघ्नाः प्रयुक्तखण्डानि पृथग् भवन्ति॥१२॥

अथ प्रमाणैः (प्रमाणधनैः) गुणिताः स्वकालाः व्यतीतकालघ्नफलोद्धृताः ते विमिश्रनिघ्नाः स्वयोगभक्ता पृथक् प्रयुक्तखण्डानि भवन्ति ॥

अपने-अपने प्रमाण धनों से गुणे हुये अपने-अपने कालों को व्यतीत कालों से गुणे हुये फलों से भाग दें । उनको मिश्रकाल से गुणाकर अपने योग से भाग देने पर अलग-अलग प्रयुक्त के (सूद पर दिये हुये धन का) टुकड़े हो जायँगे ॥ १ ॥

उपपत्तिः—अत्रालापानुसारेण सर्वत्र फलसमत्वादाद्याविष्टसमं फलं प्रकल्प्यानुपातेन प्रमाणधन सम्बन्धीयफलम् $= \frac{\text{प्र· फ·} \times \text{व्य· का·}}{\text{प्र· का·}}$, पुनरनुपातेन प्रथमखण्डम् $= \frac{\text{प्र· ध·} \times \text{इ}}{\frac{\text{प्र· फ·} \times \text{व्य· का}}{\text{प्र·का}}} = \frac{\text{प्र· ध·} \times \text{इ} \times \text{प्र· का·}}{\text{प्र· फ·} \times \text{व्य· का·}}$

एवमेव द्वितीयखण्डम् $= \frac{\text{प्र· ध}' \times \text{इ} \times \text{प्र· का}'}{\text{प्र· फ}' \times \text{व्य· का}'}$ ।

$\therefore \text{प्र·ख·} + \text{द्वि·ख·} = \text{इ}\left\{\frac{\text{प्र· ध·} \times \text{प्र· का·}}{\text{प्र· फ·} \times \text{व्य· का·}} + \frac{\text{प्र· ध}' \times \text{प्र· का}'}{\text{प्र· फ}' \times \text{व्य· का}'}\right\} = \text{इ·} \times \text{यो·}$

$\therefore \text{इ·} \times \text{यो·} =$ इष्टसम्बन्धीयमिश्रधनम् ।

ततोऽनुपातः—यद्यनेन पृथक् खण्डतुल्यं मूलधनं तदोद्दिष्टमिश्रधनेन किमिति जातं क्रमेण मूलधनमानम्—

$\therefore$ वास्तव $\text{प्र· ख·} = \frac{\text{मि· ध·} (\text{प्र· का·} \times \text{प्र· ध·}) \times \text{इ}}{\text{इ· यो·} \times \text{प्र· फ·} \times \text{व्य· का·}}$

$= \frac{\text{मि· ध·} (\text{प्र· का·} \times \text{प्र· ध·})}{\text{यो·} \times \text{प्र· फ·} \times \text{व्य· का·}}$ । एवं $\text{द्वि· खं·} = \frac{\text{मि· ध·} (\text{प्र· का}' \times \text{प्र· ध}')}{\text{व्य· का}' \times \text{प्र· फ}' \times \text{यो·}}$

अत उपपन्नम् ।

उद्देशकः ।

यत् पञ्चकत्रिकचतुष्कशतेन दत्तं
खण्डैस्त्रिभिर्गणक ! निष्कशतं षडूनम् ।
मासेषु सप्तदशपञ्चसु तुल्यमाप्तं
खण्डत्रयेऽपि हि फलं वद खण्डसंख्याम् ॥ १ ॥

हे गणक ! ९४ निष्क को ३ टुकड़े करके ५, ३ और ४ सैकड़े सूद की दर से दिया गया, तो तीनों टुकड़ों में क्रम से ७, १० और ५ महीने में समान ही सूद मिले, तो टुकड़ों की संख्या बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । $\frac{१}{\frac{१००}{५}}$ । ७ | $\frac{१}{\frac{१००}{३}}$ । १० | $\frac{१}{\frac{१००}{४}}$ । ५ ।

मिश्रधनम् ९४ । लब्धानि यथाक्रमेण खण्डानि २४ । २८ । ४२ ।
पञ्चराशिकवत्करणेन समकलान्तरम् ८$\frac{२}{५}$ ।

उदाहरण—प्रश्न का न्यास मूल में स्पष्ट है। यहाँ सूत्र के अनुसार अपने-अपने प्रमाण धन को अपने-अपने प्रमाण काल से गुणा कर अपने-अपने व्यतीत काल से गुणे हुये अपने-अपने प्रमाण फल से भाग देने पर क्रम से—

$\frac{१\times१००}{७\times५} = \frac{२०}{७}$ । $\frac{१\times१००}{३\times१०} = \frac{१०}{३}$ । $\frac{१\times१००}{४\times५} = \frac{५}{१}$ हुये।

अब इनको मिश्रधन ९४ से गुणा कर इन ($\frac{२०}{७} + \frac{१०}{३} + \frac{५}{१}$) के योग $\frac{२३५}{२१}$ से भाग देने पर क्रम से खण्ड संख्यायें हुईं।

यथा—प्रथम खण्ड $= \frac{२०}{७} \times \frac{९४\times२१}{२३५} = ४ \times २ \times ३ = २४$ निष्क।

द्वितीय खण्ड $= \frac{१०\times९४\times२१}{३\times२३५} = २ \times २ \times ७ = २८$ निष्क।

तृतीय खण्ड $= \frac{५\times९४\times२१}{२३५} = २ \times २१ = ४२$ निष्क।

यहाँ पञ्च राशिक से तीनों टुकड़ों के सूद निकालने पर समान ही होता है।

यथा—प्रथम खण्ड का सूद $= \frac{७\times२४\times५}{१\times१००} = \frac{७\times६}{५} = \frac{४२}{५} = ८\frac{२}{५}$ निष्क।

द्वितीय खण्ड का सूद $= \frac{१०\times२८\times३}{१००} = \frac{१४\times३}{५} = \frac{४२}{५} = ८\frac{२}{५}$ निष्क।

तृतीय खण्ड का सूद $= \frac{५\times४\times४२}{१००} = \frac{४२}{५} = ८\frac{२}{५}$ निष्क।

अथ मिश्रान्तरे करणसूत्रं वृत्तार्धम्।

प्रक्षेपका मिश्रहता विभक्ताः प्रक्षेपयोगेन पृथक् फलानि।

प्रक्षेपकों (अपने-अपने मूल धन) को मिश्रधन से अलग-अलग गुणा कर प्रक्षेपकों के योग से सभी को भाग दें, तो अलग-अलग फल (नफा) होते हैं॥

उपपत्ति :—अत्रालापोक्त्या प्रक्षेपकाः क्रमेण प्र० प्र० क्षे०। द्वि० प्र० क्षे०। तृ० प्र० क्षे०। एषां योगः = प्र० क्षे० यो०। ततोऽनुपातेन प्र० फ =

$\frac{\text{प्र. प्र. क्षे.} \times \text{मि. ध.}}{\text{प्र. क्षे. यो.}}$ । द्वि० फ $= \frac{\text{द्वि. प्र. क्षे.} \times \text{मि. ध.}}{\text{प्र. क्षे. यो.}}$ ।

एवं तृ० फ० $= \frac{\text{तृ. प्र. क्षे.} \times \text{मि. ध.}}{\text{प्र. क्षे. यो.}}$ । अत उपपन्नम्।

अत्रोद्देशकः।

पञ्चाशदेकसहिता गणकाष्टषष्टिः पञ्चोनिता नवतिरादिधनानि येषाम्।
प्राप्ता विमिश्रितधनैस्त्रिशती त्रिभिस्तैर्वाणिज्यतो वद विभज्य धनानि तेषाम्?

हे गणक? जिन तीन बनियों के पास क्रम से ५१, ६८ और ८५ मूल धन थे, उन तीनों ने अपने-अपने मूल धन को इकट्ठा (साझा) कर व्यापार

से ३०० प्राप्त किया, तो उनके धनों को बाँटने पर उनको कितने २ धन मिले?

प्रक्षेपकन्यासः । ५१ । ६८ । ८५ । मिश्रधनम् ३०० । जातानि धनानि ७५ । १०० । १२५ । एतान्यादिधनैरूनानि लाभाः २४ । ३२ । ४०

अथ वा मिश्रधनम् ३०० । आदिधनैक्येन २०४ ऊनं सर्वलाभयोगः ९६ । अस्मिन् प्रक्षेपगुणिते प्रक्षेपयोग २०४ भक्ते लाभाः २४ । ३२ । ४० ।

उदाहरण—यहाँ प्रश्न के अनुसार प्रक्षेपक क्रम से ५१, ६८, ८५ हैं। मिश्रधन = ३०० । अब अपने-अपने प्रक्षेपकों को मिश्र धन ३०० से गुणाकर प्रक्षेपकों के योग (५१ + ६८ + ८५) = २०४ से भाग देने पर क्रम से— $\frac{५१ \times ३००}{२०४} = ७५$ । $\frac{६८ \times ३००}{२०४} = १००$ । $\frac{८५ \times ३००}{२०४} = १२५$ हुये। इनमें अपने-अपने प्रक्षेपक घटाने से क्रम से लाभ होंगे। यथा—७५ − ५१ = २४ = प्रथम । १०० − ६८ = ३२ = द्वितीय । १२५ − ८५ = ४० = तृतीय ।

विशेष—नवीनरीति से प्रश्नोत्तर ।

साझा (Share)

(१) क, ख और ग ने क्रम से ६००० रु०, ८००० रु० और १०००० रु० किसी व्यापार में लगाया, तो लाभ ४००० हुआ । इसको लगी हुई पूंजी के अनुपात में बाँटो ?

उत्तर—यहाँ क, ख और ग के धन का योग = २४००० रु० ।

∵ २४००० रु० में क का ६००० रु० है ।

∴ ४००० रु० में क का = $\frac{६००० \times ४०००}{२४०००} = \frac{२४०००}{२४} = १०००$

इसी तरह ख का = $\frac{८००० \times ४०००}{२४०००} = \frac{३२०००}{२४} = \frac{४०००}{३} =$ १३३३ रु० ५ आ० ४ पा० । एवं ग का = $\frac{१०००० \times ४०००}{२४०००} = \frac{४००००}{२४} = \frac{५०००}{३} =$ १६६६ रु० १० आ० ८ पा० ।

(२) राम ने ५०० रु० लगाकर एक व्यापार आरम्भ किया, २ महीने के बाद श्याम सामिल हुआ और उसने ३०० रु० लगाया, उसके ३ महीने के बाद हरि ने ४०० रु० देकर सामिल हुआ और उसके ४ महीने के बाद यदु ने ७०० रु० देकर सामिल हुआ, साल के अन्त में कुल नफा ८०० रु० यदि हो, तो चारों को कितने-कितने मिलेंगे ।

उत्तर— ∵ राम की ५०० की पूँजी १२ महीने तक रही अर्थात् राम की (५०० × १२ =) ६००० की पूँजी १ महीना तक रही। इसी तरह श्याम की (३०० × १० =) ३००० की पूँजी १ महीना तक रही। एवं हरी की (४०० × ७ =) २८०० की पूँजी १ महीना तक रही, और यदु की (७०० × ३ =) २१०० की पूँजी १ महीना तक रही, अतः लाभ के रुपये ८००, ६०००, ३०००, २८०० और २१०० के समानुपाती भागों में बाँटे जायँगे।

∴ ६००० + ३००० + २८०० + २१०० = १३९०० ।

∵ १३९०० रु० में राम का ६००० रु० हैं।

∴ ८०० रु० में राम का $\frac{८००\times६०००}{१३९००}$ रु० होंगे।

∴ $\frac{८००\times६०००}{१३९००} = \frac{८\times६०००}{१३९} = \frac{४८०००}{१३९}$ रु० ।

इसी तरह श्याम का नफा = $\frac{८००\times३०००}{१३९००} = \frac{८\times३०००}{१३९} = \frac{२४०००}{१३९}$ ।

हरी का नफा = $\frac{८००\times२८००}{१३९००} = \frac{८\times२८००}{१३९} = \frac{२२४००}{१३९}$ रु० ।

यदु का नफा = $\frac{८००\times२१००}{१३९००} = \frac{८\times२१००}{१३९} = \frac{१६८००}{१३९}$ रु० ।

अभ्यासार्थं प्रश्नाः—

(१) मोहन, सोहन और राघव ने क्रम से ८०० रु० ६७५ रु० और ५२५ रु० व्यापार में लगाये। कुल धन पर ८२५ रु० नफा हुआ तो प्रत्येक को कितने-कितने मिले।

(२) क, ख, ग और घ चारों ने मिलकर ८०० रु० किसी व्यापार में लगाया। वर्ष के अन्त में उनको क्रम से २३५, १००, १४५ और १२० रु० मिले, तो प्रत्येक की पूँजी बताओ।

(३) किसी व्यापार में क और ख क्रम से ८४५ पौ० और ६५५ पौ० लगाकर आरम्भ किये, ३ मास के बाद ग १२२५ पौ० देकर सामिल हो गया। १ वर्ष में १२०० पौ० लाभ हुआ तो तीनों के कितने कितने लाभ हुए।

(४) क, ख और ग अपने-अपने बैलों को चराते हैं। क के १५ बैल ८ महीनों तक, ख के २० बैल ७ महीनों तक और ग के १२ बैल ९ महीनों तक चरे। यदि कुल चराई में ४६ रु० खर्च हो, तो तीनों को कितना-कितना देना पड़ेगा।

५) क, ख, ग और घ चारों ने एक व्यापार में क्रम से ४४, ११०, ११२ और १९८ रु० लगाया। यदि व्यापार से उनको ५८३ रु० मिले, तो प्रत्येक को कितने रु० मिले।

वाप्यादिपूरणे करणसूत्रं वृत्तार्धम्।

भजेच्छिदोंऽशैरथ तैर्विमिश्रै रूपं भजेत् स्यात् परिपूर्तिकालः॥१३॥

छिदः अंशैर्भजेत्। अथ तैर्विमिश्रैः रूपं भजेत्। लब्धं परिपूर्तिकालः स्यात्।

अपने २ अंशों से हर में भाग दें और उनके योग से १ में भाग दें तो पूर्ति का समय हो जायगा।

उपपत्तिः—अत्र कल्प्यन्ते तावन्निर्झराणां वाप्यादिपूरणकालाः—

$\frac{\text{अ}}{\text{क}}$, $\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$, $\frac{\text{च}}{\text{त}}$, ततोऽनुपातः—यद्युक्तकालैः निर्झराः पृथक्-पृथक् वापीं पूरयन्ति तदैकेन दिनेन किमिति जातानि वाप्यंशपूरणप्रमाणानि—

$\frac{\times 1}{\frac{\text{अ}}{\text{क}}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}$। एवं $\frac{\text{घ}}{\text{ग}}$, $\frac{\text{त}}{\text{च}}$। ततोऽन्योऽनुपातः—यद्येषां योगेनैकं दिन तदा समस्तवापीपूरणे किमिति जातं वापीपूरणकालमानम्—

$$\frac{1 \times 1}{\frac{\text{क}}{\text{अ}} + \frac{\text{घ}}{\text{ग}} + \frac{\text{त}}{\text{च}}}$$ अत उपपन्नम्।

उदाहरणम्।

ये निर्झरा दिनदिनार्धतृतीयषष्ठैः संपूरयन्ति हि पृथक् पृथगेव मुक्ताः।
वापीं यदा युगपदेव सखे! विमुक्तास्ते केन वासरलवेन तदा वदाशु॥१॥

हे मित्र! ४ झरनों को अलग-अलग खोलने पर १ वापी को क्रम से दिन, $\frac{1}{2}$ दिन, $\frac{1}{3}$ दिन और $\frac{1}{6}$ दिन में भरते हैं, यदि सब एक ही बार खोल दिये जाँय, तो दिन के कितने भाग में भरेंगे। यह शीघ्र बताओ।

न्यासः। $\frac{1}{1}$। $\frac{1}{2}$। $\frac{1}{3}$। $\frac{1}{6}$।

लब्धो वापीपूरणकालो दिनांशः $\frac{1}{12}$।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार न्यास = $\frac{1}{1}$। $\frac{1}{2}$। $\frac{1}{3}$। $\frac{1}{6}$। अब सूत्र के अनुसार हर में अंश से भाग देने पर—$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{1}$ हुए। इनका योग =

१ + २ + ३ + ६ = १२ । इससे १ में भाग देने पर $\frac{१}{१२}$ हुआ । ∴ वापी का पूरण काल = $\frac{१}{१२}$ दिन उत्तर ।

प्रश्नान्तर—

(१) किसी हौज में तीन नल हैं । पहला उसे ५ घण्टे में और दूसरा ४ घण्टे में भरता है और तीसरा नल भरे हुए हौज को २ घण्टे में खाली करता है, तो तीनों एक साथ खोल देने पर भरे हुए हौज को कितने समय में खाली करेगा ।

उत्तर—∵ पहला नल ५ घण्टे में हौज को भरता है

∴ „ „ १ घण्टे में हौज का $\frac{१}{५}$ भरेगा ।

∵ दूसरा नल ४ घण्टे में हौज को भरता है

∴ „ „ १ घण्टे में हौज का $\frac{१}{४}$ भरेगा ।

∵ ३ नल २ घण्टे में हौज को खाली करता है

∴ „ „ १ घण्टे में हौज का $\frac{१}{२}$ खाली करेगा ।

∴ तीनों मिलकर १ घण्टे में $\frac{१}{२} - \left(\frac{१}{५} + \frac{१}{४}\right)$ हौज को खाली करेगा । परन्तु $\frac{१}{२} - \left(\frac{१}{५} + \frac{१}{४}\right) = \frac{१}{२} - \frac{९}{२०} = \frac{२० - १८}{४०} = \frac{२}{४०} = \frac{१}{२०}$ । ∵ $\frac{१}{२०}$ को १ घण्टे में खाली करता है ।

∴ समूचे हौज को $\frac{१}{\frac{१}{२०}} = २०$ घण्टे में खाली करेगा ।

(२) किसी तालाब को ३ नल क्रम से २, ३ और ४ घण्टे में भरते हैं और चौथा नल ५ घण्टे में खाली करता है । यदि चारों नल एक ही बार खोल दें, तो तालाब को कितने समय में भर देंगे ।

उत्तर—यहाँ पहले के अनुसार १ घण्टे में हौज का भरने वाला भाग एवं खाली होने वाला भाग निकाला तो—$\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{५}$ हुये । ∴ चारों मिल कर १ घण्टा में खाली करेंगे $= \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} - \frac{१}{५} = \frac{३० + २० + १५ - १२}{६०} = \frac{५३}{६०}$

∴ चारों मिलकर समूचे तालाब को $\frac{६०}{५३}$ घण्टे में भरेंगे $= १\frac{७}{५३}$ घण्टा ।

अथ क्रयविक्रये करणसूत्रं वृत्तम् ।

पण्यैः स्वमूल्यानि भजेत् स्वभागैर्हत्वा तदैक्येन भजेच्च तानि ।
भागांश्च मिश्रेण धनेन हत्वा मौल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ॥

स्वमूल्यानि स्वभागैः हत्वा, पण्यैः भजेत्, च (पुनः) तानि, भागांश्च मिश्रेण धनेन हत्वा तदैक्येन भजेत् । लब्धानि मौल्यानि पण्यानि यथाक्रमं स्युः ॥

अपने-अपने मूल्य को अपने-अपने भाग से गुणाकर अपने-अपने पण्य (भाव) से भाग दें, तब जो फल मिलें उनको और भागों को अलग-अलग मिश्रधन से गुणा कर उन (फल) के योग से भाग दें तो मूल्य और पण्य (परिमाण) क्रम से हो जाँयगे ॥ ५ ॥

उपपत्तिः—अत्रानुपातेन स्वभागसम्बन्धीयमौल्यानि = $\frac{\text{स्व. मू.} \times \text{स्व. भाग}}{\text{स्व. पण्य}}$ । पुनरनुपातः—यद्येषां योगेनैतानि पृथक्-पृथक् मौल्यानि तथोक्तभागांश्च लभ्यन्ते तदा मिश्रधनेन किमिति जातानि मूल्यानि पण्यानि चेति ।

उद्देशकः ।

सार्धं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्मेण मानाष्टकं
मुद्गानां च यदि त्रयोदशमिता एता वणिक्! काकिणीः ।
आदायार्पय तण्डुलांशयुगलं मुद्गैकभागान्वितं
क्षिप्रं क्षिप्रभुजो व्रजेम हि यतः सार्थोऽग्रतो यास्यति ॥ १ ॥

हे वणिक्! यदि १ द्रम्म में ३$\frac{१}{२}$ मान चावल और ८ मान मुद्ग (मूंग) अलग-अलग मिलते हैं, तो ये १३ काकिणी लेकर दो भाग चावल और १ भाग मूंग दो । मैं शीघ्र भोजन करके जाऊँगा, क्योंकि मेरा साथी आगे बढ़ जायगा ॥ १ ॥

न्यासः । पण्ये $\frac{७}{२}$ । $\frac{८}{१}$ । मौल्ये $\frac{१}{१}$ । $\frac{१}{१}$ । स्वभागौ $\frac{२}{१}$ । $\frac{१}{१}$ । मिश्रधनम् $\frac{१३}{६४}$ ।

अत्र स्वमूल्ये स्वभागगुणिते, पण्याभ्यां भक्ते जाते $\frac{४}{७}$ । $\frac{१}{८}$ । भागौ च । $\frac{२}{१}$ । $\frac{१}{१}$ । मिश्रधनेन $\frac{१३}{६४}$ संगुण्य तदैक्येन भक्ते जाते तण्डुलमुद्गमूल्ये $\frac{१}{६}$ । $\frac{७}{१९२}$ । तथा तण्डुलमुद्गमाने भागौ $\frac{७}{१२}$ । $\frac{७}{२४}$ । अत्र तण्डुलमूल्ये पणौ २ । काकिण्यौ २ । वराटकाः १३$\frac{१}{३}$ । मुद्गमूल्ये काकिण्यौ २ । वराटकाः ६$\frac{२}{३}$ ।

उदाहरण—पण्य $\frac{७}{२}$ । $\frac{८}{१}$ । मौल्य $\frac{१}{१}$ । $\frac{१}{१}$ । स्वभाग $\frac{२}{१}$ । $\frac{१}{१}$ । मिश्रधन= १३ काकिणी $\therefore \frac{१३}{६४}$ = द्रम्म ।

अब सूत्र के अनुसार अपने-अपने मूल्य को अपने-अपने भाग से गुणा कर अपने-अपने पण्य से भाग देने पर $\frac{१\times२\times२}{१\times१\times७}=\frac{४}{७}$ और $\frac{१\times१\times१}{१\times१\times८}=\frac{१}{८}$ हुये।

इनका योग $=\frac{४}{७}+\frac{१}{८}=\frac{३९}{५६}$। अब $\frac{४}{७}$ और $\frac{१}{८}$ को अलग-अलग मिश्रधन $\frac{१३}{६४}$ से गुणा कर $\frac{३९}{५६}$ से भाग देने पर $\frac{४\times१३\times५६}{७\times६४\times३९}=\frac{१}{६}=$ तण्डुल मौल्य और $\frac{१\times१३\times५६}{८\times६४\times३९}=\frac{७}{६४\times३}=\frac{७}{१९२}$ मुद्ग मौल्य हुये।

अब अपने-अपने भाग को $\frac{१३}{६४}$ से गुणा कर $\frac{३९}{५६}$ से भाग देने पर तण्डुल परिमाण $=\frac{२\times१३\times५६}{१\times६४\times३९}=\frac{७}{१२}$ और मुद्गपरिमाण $=\frac{१\times१३\times५६}{१\times६४\times३९}=\frac{७}{२४}$ हुये। चावल का मूल्य $=\frac{१}{६}$ द्रम्म $=\frac{१\times१६}{६}=$ पण $=$ २ पण। शेष ४ को ४ से गुणा किया तो १६ हुआ, इसको ६ से भाग देकर लब्धि २ काकिणी। शेष ४ को २० से गुणा कर ६ से भाग देने पर $१३\frac{१}{३}$ वराटक। इसी प्रकार मुद्ग के मूल्य= २ काकिणी और $६\frac{२}{३}$ वराटक हुये।

उदाहरणम्।

कर्पूरस्य वरस्य निष्कयुगलेनैकं पलं प्राप्यते
वैश्यानन्दन ! चन्दनस्य च पलं द्रम्माष्टभागेन चेत्।
अष्टांशेन तथाऽगुरोः पलदलं निष्केण मे देहि तान्
भागैरेककषोडशाष्टकमितैर्धूपं चिकीर्षाम्यहम्॥ २॥

हे वैश्यानन्दन ! २ निष्क में उत्तम कपूर का १ पल मिलता है और $\frac{१}{८}$ द्रम्म में चन्दन का १ पल मिलता है तथा $\frac{१}{८}$ द्रम्म में अगुरु $\frac{१}{२}$ पल मिलता है, तो १ निष्क में उनका क्रम से १, १६ और ८ भाग दो। मैं उनका धूप बनाना चाहता हूँ।

न्यासः। पण्यानि $\frac{१}{१}$। $\frac{१}{१}$। $\frac{१}{२}$। मौल्यानि $\frac{३२}{१}$। $\frac{१}{८}$। $\frac{१}{८}$। भागाः $\frac{१}{१}$। $\frac{१६}{१}$। $\frac{८}{१}$। मिश्रधनं द्रम्माः १६। लब्धानि कर्पूरादीनां मूल्यानि $१४\frac{२}{९}$। $\frac{८}{९}$। $\frac{८}{९}$। तथैव तेषां पण्यानि $\frac{४}{९}$। $७\frac{१}{९}$। $३\frac{५}{९}$।

उदाहरण—इसकी क्रिया पहले की तरह होती है जो मूल में स्पष्ट है।

रत्नमिश्रे करणसूत्रं वृत्तम्।

नरघ्नदानोनितरत्नशेषैरिष्टे हृते स्युः खलु मौल्यसंख्याः।
शेषैर्हृते शेषवधे पृथक्स्थैरभिन्नमूल्यान्यथ वा भवन्ति॥१५॥

नरघ्नदानोनितरत्नशेषैः इष्टे हृते खलु मौल्यसंख्याः स्युः। अथवा—शेषवधे पृथक्स्थैः शेषैर्हृते अभिन्नमूल्यानि भवन्ति।

मनुष्य संख्या से गुणे हु येदान की संख्या से घटा हुआ जो रत्न शेष, उनसे इष्ट राशि में भाग दें, तो रत्नों के अलग-अलग मूल्य निकल जाते हैं। अथवा—शेषों के घात में शेषों से भाग देने पर मूल्य की संख्या अभिन्न होती है।

उपपत्तिः—नरसंख्या = न । एकस्मै दानसंख्या = दा । ततोऽनुपातेन

नरसंख्यादानमानम् = $\frac{दा \times न}{1}$ = दा × न । रत्नसंख्या = र० सं० ।

∴ र० सं० − दा × न = समधनानि । अत्र समधनमिष्टं प्रकल्प्य पुनरनुपातः—यदि पृथग् रत्नशेषैरिष्टं धनं तदैकेन किमिति पृथग् रत्नमूल्यानि भवन्ति । अभिन्नरत्नमूल्यज्ञानार्थं रत्नशेषघातसममिष्टं प्रकल्पितमिति ।

अत्रोद्देशकः ।

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं
सद्वज्राणि च पञ्च रत्नवणिजां येषां चतुर्णां धनम् ।
सङ्गस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्त्वैकमेकं मिथो
जातास्तुल्यधनाः पृथग् वद सखे! तद्रत्नमौल्यानि मे ॥ १ ॥

हे मित्र ! चार रत्न के व्यापारियों में एक के पास ८ माणिक्य, दूसरे के पास १० नीलम, तीसरे के पास १०० मोती और चौथे के पास ५ उत्तम हीरे थे। उन्होंने प्रेम के कारण अपने-अपने धन से एक-एक रत्न दूसरों को दे दिया, तो सब के पास समान धन हो गये अतः उन रत्नों के मूल्य अलग-अलग बताओ ॥ १ ॥

न्यासः । मा ८ । नी १० । मु १०० । व ५ । दानम् १ । नराः ४ । नरगुणितदानेन ४ । रत्नसङ्ख्यासूनितासु शेषाः मा ४ । नी ६ । मु ९६ । व १ । एतैरिष्टराशौ भक्ते रत्नमूल्यानि स्युरिति । तानि च यथाकथञ्चिदिष्टे कल्पिते भिन्नानि । अत्रेष्टं स्वधिया कल्प्यते । तथाऽत्रापीष्टं कल्पितम् ९६ । अतो जातानि मूल्यानि २४ । १६ । १ । ९६ । समधनम् २३३ । अथवा शेषाणां घाते २३०४ । पृथक् शेषैर्भक्ते जातान्यभिन्नानि ५७६ । ३८४ । २४ । २३०४ । जनानां चतुर्णां तुल्यधनम् ५५९२ । तेषामेते भागाः संभाव्यन्ते ।

उदाहरण—यहाँ नरसंख्या ४ और दानसंख्या १ है अतः इनका घात ४ × १ = ४ को रत्न की संख्या (८।१०।१००।५) में घटाने से मा० ४ नी० ६ मु० ९६ और वज्र १ हुये। इन चारों के लघुतमापवर्त्य ९६ होते हैं अतः ९६ इष्ट मान कर उसमें रत्नशेष से अलग-अलग भाग देने पर रत्नों के मूल्य होंगे। जैसे ९६ ÷ ४ = २४ माणिक्य १ का मूल्य। ९६ ÷ ६ = १६=१ नीलम मू०। ९६ ÷ ९६ = १ मोती का मू०। ९६ ÷ १ = ९६ वज्र १ का मूल्य। दूसरे इष्ट पर से भिन्नात्मक मूल्य होंगे।

अथवा—शेषों के घात = ४ × ६ × ९६ × १ = ९६ × २४। इसमें अलग-अलग शेषों से भाग देने पर—$\frac{९६ + २४}{४}$=५७६ माणिक्य का मूल्य, $\frac{९६ \times २४}{६}$= ३८४ नीलम का मूल्य, $\frac{९६ \times २४}{९६}$ = २४ मोती का मूल्य और $\frac{९६ \times २४}{१}$ =. २३०४ वज्र का मूल्य हुआ। इन पर से तुल्यधन = २३२ वा ५५९२ होता है। समधन की क्रिया नीचे स्पष्ट है।

प्रथम वणिक् के पास ५ मा० १ नी० १ मु० १ व०

∴ इनके मूल्य = १२० + १६ + १ + ९६ = २३३।

द्वितीय वणिक् के धन ७ नी० १ मा० १ मु० १ व०

∴ इनके मूल्य = ११२ + २४ + १ + ९६ = २३३।

तृतीय वणिक् के धन ९७ मु० १ मा० १ नी० १ व०

∴ इनके मूल्य = ९७ + २४ + १६ + ९६ = २३३।

चतुर्थ वणिक् के धन २ व० १ मा० १ नी० १ मु०

∴ इनके मूल्य = १९२ + २४ + १६ + १ = २३३।

इसी प्रकार दूसरा समधन भी लाना चाहिये।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) क के पास ६० गाय, ख के पास ३२ बैल और ग के पास २८ घोड़े हैं। इन्होंने अपने-अपने पास से तीन-तीन जानवर आपस में दूसरों को दे दिये, तो सब के पास समान धन हो गये अतः प्रत्येक जानवर का मूल्य बताओ।

(२) १ के ३५ आम के पेड़ और २ के ८५ लीची के पेड़ थे। आपस में दोनों ने ५ पेड़ दूसरों को दिये, तो दोनों की सम्पत्ति तुल्य हो गयी, अतः

(३) क के पास १८० नेपाली सिक्के हैं, और ख के पास १०० भारतीय मुद्राएँ और ग के पास ९५ अमेरिकन मुद्राएँ हैं, तीनों ने अपने धन से दस-दस मुद्राएँ अपने प्रत्येक साथी को दीं, तो सब के पास तुल्य धन हो गया अतः मुद्राओं का मूल्य बताओ ।

(४) यदि हरि के पास ३० पेड़े और हर के पास ४५ रसगुल्ले हों, और वे दोनों एक दूसरे को १० मिठाइयाँ दे दें, तो उनके पास तुल्य दाम की मिठाइयाँ हो जायँ, तो मिठाइयों का दाम अलग-अलग बताओ ।

(५) क के पास ९ बीघे धान का खेत, ख के पास १२ बीघे जनेरे का खेत, और ग के पास ३० बीघे यव का खेत है । वे अपने खेत में से दो-दो बीघे एक दूसरे को दे देते हैं तब सबों के पास समान सम्पत्ति हो जाती है, तो उनके अलग-अलग खेत की दर बताओ ।

अथ सुवर्णगणिते करणसूत्रं वृत्तम्

सुवर्णवर्णाहतियोगराशौ स्वर्णैक्यभक्ते कनकैक्यवर्णः ।
वर्णो भवेच्छोधितहेमभक्ते वर्णोद्धृते शोधितहेमसङ्ख्या ॥ १६ ॥

सुवर्णवर्णाहति योगराशौ स्वर्णैक्यभक्ते सति कनकैक्यवर्णः स्यात् । शोधितहेमभक्ते सति वर्णः स्यात् । वर्णोद्धृते सति शोधितहेमसंख्या भवेत् ।

सुवर्णमानों की संख्या को अलग-अलग अपने-अपने वर्णों से गुणा कर, सब के योग में सुवर्ण मानों की संख्या के योग से भाग देने पर सोने के योग का वर्ण हो जायगा । यदि उसी योग में शोधित सुवर्ण मान की संख्या से भाग दें तो सोने का वर्ण होगा । या उसी योग में वर्ण से भाग देने पर शोधित सुवर्ण की संख्या होगी ॥ ७ ॥

उपपत्तिः—कस्यापि सममाषस्य मूल्यं वर्णः कथ्यते । कल्प्यते सममाष प्रमाणम् = स० मा० । ततोऽनुपातः—यदि सममाषमितसुवर्णेन प्रथम वर्णस्तदा प्रथमसुवर्णमाषेन किमिति प्रथमसुवर्णमौल्यम् $= \frac{\text{प्र· व} \times \text{प्र· सु· मा·}}{\text{स· मा·}}$

एवं द्वितीयसुवर्णमौल्यम् $= \frac{\text{द्वि· व} \times \text{द्वि· सु· मा·}}{\text{स· मा·}}$ एवमग्रेऽपि । अनयोर्योगः-

$$\frac{\text{प्र० व०} \times \text{प्र० सु० मा०}}{\text{स० मा०}} + \frac{\text{द्वि० व} \times \text{द्वि० सु० मा०}}{\text{स० मा०}} = \frac{\text{यो०}}{\text{स० मा०}}$$ सुवर्णद्वययोगमूल्यम् ।

ततो यदि सर्वसुवर्णयोगेनेदं योगमूल्यं तदा 'स० मा०' मितेन किमिति जातं

कनकैक्यवर्णः— $\frac{\text{यो} \times \text{स० मा०}}{\text{सु० यो०} \times \text{स० मा०}} = \frac{\text{यो०}}{\text{सु० यो०}}$ । यदि सुवर्णयोगे शोधिते

सति न्यूनत्वं तदाऽनुपातः—यदि शोधितसुवर्णेन $\frac{\text{यो०}}{\text{स० मा०}}$ मितं मूल्यं लभ्यते

तदा 'स० मा०'मितेन किमिति जातं स्वर्णैक्यवर्णमानम्—

$\frac{\text{यो०} \times \text{स० मा०}}{\text{शो० हे} \times \text{स० मा०}} = \frac{\text{यो०}}{\text{शो० हे०}}$ । वा शो० हे० $= \frac{\text{यो०}}{\text{ऐ० व०}}$ । अत उपपन्नम् ।

उदाहरणानि ।

विश्वार्करुद्रदशवर्णसुवर्णमाषा
दिग्वेदलोचनयुगप्रमिताः क्रमेण ।
आवर्त्तितेषु वद तेषु सुवर्णवर्ण-
स्तूर्णं सुवर्णगणितज्ञ ! वणिक् ! भवेत् कः ॥ १ ॥
ते शोधनेन यदि विंशतिरुक्तमाषाः
स्युः षोडशाशु वद वर्णमितिस्तदा का ? ।
चेच्छोधितं भवति षोडशवर्णहेम
ते विंशतिः कति भवन्ति तदा तु माषाः ? ॥ २ ॥

हे सुवर्णगणितज्ञ वणिक् ! १३, १२, ११ और १० वर्ण के सोने की क्रम से १०, ४, २ और ४ माषा हैं, तः उनको एक साथ मिला देने पर सोने का वर्ण क्या होगा । यदि उक्त २० माषा सोना शोधन करने पर १६ माषा हो जाय, तो उसका वर्णमान क्या होगा । यदि उक्त सुवर्ण को मिलाने पर वह १६ वर्ण का हो जाय, तो २० माषा घटकर कितना हो जायगा ।

न्यासः । $\frac{१३}{१०}$ $\frac{१२}{४}$ $\frac{११}{२}$ $\frac{१०}{४}$ ।

जाताऽऽवर्त्तितसुवर्णवर्णमितिः १२ । एत एव यदि शोधिताः सन्तः षोडश माषा भवन्ति, तदा वर्णाः १५ । यदि ते च षोडश वर्णास्तदा पञ्चदश माषा भवन्ति १५ ।

उदाहरण—यहाँ वर्ण और मासे को न्यास करने पर सूत्र के अनुसार सुवर्ण और वर्ण के घात क्रम से—

वर्ण	१३	१२	११	१०
माषा	१०		२	४

$१३ \times १० = १३०$ । $१२ \times ४ = ४८$ । $११ \times २ = २२$ । $१० \times ४ = ४०$ हुये । इनका योग $= १३० + ४८ + २२ + ४० = २४०$ । तथा सुवर्णयोग $= १० + ४ + २ + ४ = २०$ ।

$\therefore$ स्वर्णैक्य वर्ण $= २४० \div २० = १२$ ।

यदि शोधित हेम $= १६$ माषा, तो वर्ण $= २४० \div १६ = १५$ । यदि वर्ण $= १६$ तदा शोधितहेममाषा $= २४० \div १६ = १५$ ।

अथ वर्णज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम् ।

स्वर्णैक्यनिघ्नाद्युतिजातवर्णात् सुवर्णतद्वर्णवधैक्यहीनात् ।
अज्ञातवर्णाग्निजसंख्ययाऽऽप्तमज्ञातवर्णस्य भवेत् प्रमाणम् ॥१७॥

युतिजातवर्णात् स्वर्णैक्यनिघ्नात् सुवर्णतद्वर्णवधैक्यहीनात् अज्ञातवर्णाग्निज-संख्ययाप्त, अज्ञातवर्णस्य प्रमाणं भवेत् ।

अनेक प्रकार के सोने को एक साथ मिलाने पर उसका जो वर्ण होता है उसे युतिजातवर्ण कहते हैं । युतिजात वर्ण को सोने के योग से गुणा कर उसमें सुवर्ण और अपने-अपने वर्ण के घातों के योग को घटावें । शेष में अज्ञात वर्ण सोने की संख्या से भाग दें, तो अज्ञात वर्ण का मान हो जायगा ।

उपपत्तिः—अज्ञातवर्णमानम् $=$ य, ततः 'सुवर्णवर्णाहति योगराशावि'ति सूत्रेण युतिजातवर्णः $=$ यु· व· $=$

$$\frac{\text{प्र· सु·} \times \text{प्र· व} + \text{द्वि· सु·} \times \text{द्वि· व·} + \text{तृ· सु·} \times \text{य}}{\text{सु· यो·}}$$

$$\therefore \text{यु· व·} \times \text{सु· यो} = \text{प्र· सु} \times \text{प्र· व·} + \text{द्वि· सु·} \times \text{द्वि· व} + \text{तृ· सु·} \times \text{य}$$

$$\therefore \text{तृ· सु·} \times \text{य} = \text{यु· व} \times \text{सु· यो} - \{\text{प्र सु} \times \text{प्र· व} + \text{द्वि· सु} \times \text{द्वि· व}\}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{यु· व} \times \text{सु· यो} - \{\text{प्र· सु} \times \text{प्र· व} + \text{द्वि· सु} \times \text{द्वि· व}\}}{\text{तृ· सु·}}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

दशेशवर्णा वसुनेत्रमाषा अज्ञातवर्णस्य षडेतदैक्ये ।
जातं सखे ! द्वादशकं सुवर्णमज्ञातवर्णस्य वद प्रमाणम् ॥ १ ॥

हे मित्र ! १० और ११ वर्ण का सोना क्रम से ८ और २ माषे हैं। तथा अज्ञातवर्ण का सोना ६ माषा है। उन सोने को मिलाने पर यदि वह १२ वर्ण वाला सोना हो जाता है, तो अज्ञात वर्ण का मान कहो।

न्यासः। $\frac{१०}{८}$ $\frac{११}{२}$ $\frac{०}{६}$ । लब्धमज्ञातवर्णमानम् १५।

उदाहरण—वर्ण = १०, ११, ०। माषा = ८।२।६। युतिजातवर्ण = १२। अब सूत्र के अनुसार—१२ × (८ + २ + ६) = १२ × १६ = १९२। अब—१९२-(१० × ८ + ११ × २) = १९२-(८० + २२) = १९२-१०२=९०। ९० ÷ ६ = १५ = अज्ञात वर्ण का मान।

सुवर्णज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम्।

स्वर्णैक्यनिघ्नो युतिजातवर्णः स्वर्णघ्नवर्णैक्यवियोजितश्च।
अहेमवर्णाघ्निजयोगवर्णविश्लेषभक्तोऽविदिताग्निजं स्यात् ॥१८॥

युतिजातवर्णः स्वर्णैक्यनिघ्नः स्वर्णघ्नवर्णैक्यवियोजितश्च कार्यः। शेषे अहेमवर्णाग्निजयोगवर्णविश्लेषेण भक्तस्तदाऽविदिताग्निजं स्यात्।

युतिजातवर्ण को सोने के योग से गुणा कर उसमें सुवर्ण और अपने-अपने वर्ण के घातों के योग को घटावें। शेष में अज्ञात सोने के वर्ण की संख्या और युति वर्ण के अन्तर से भाग दें, तो अज्ञात सोने का मान हो जायगा।

उपपत्तिः—अज्ञातसुवर्णमानं = य। तदा 'सुवर्णवर्णाकृतियोगराशा'-वित्यादिसूत्रेण—

युतिवर्णः = युःव = $\frac{\text{प्र· सु} \times \text{प्र· व} + \text{द्वि· सु} \times \text{द्वि· व} + \text{य} \times \text{तृ· व}}{\text{प्र· सु} + \text{द्वि सु} + \text{य}}$

∴ यु· व· (प्र· सु· + द्वि· सु + य) = प्र· सु × प्र· व + द्वि· सु × द्वि· व × य· तृ· व·।

∴ यु· व (प्र· सु + द्वि· सु·) + यु· व· × य· = प्र· सु × प्र· व + द्वि· सु × द्वि व × य· तृ· व·।

= यु· व (प्र· सु + द्वि· सु)-(प्र· सु × प्र· व + द्वि· सु × द्वि· व) = य × तृ· व–य × यु· व·।

= यु· व· (प्र सु + द्वि· सु)—(प्र· सु + प्र· व + द्वि सु × द्वि· व) = य (त व–य· व)

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{यु व (प्र· सु + द्वि· सु)} - \text{(प्र· सु} \times \text{प्र· व + द्वि· सु} \times \text{द्वि· व)}}{\text{तृ· व} - \text{यु व}}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

दशेन्द्रवर्णा गुणचन्द्रमाषाः किंचित् तथा षोड़शकस्य तेषाम् ।
जातं युतौ द्वादशकं सुवर्णं कतीह ते षोड़शवर्णमाषाः ? ॥ १ ॥

१० और १४ वर्ण के सोने क्रम से ३ और १ माषे हैं। १६ वर्ण के सोने की कुछ माषा है। इनको मिलाने से १२ वर्ण का सोना हो जाता है, तो १६ वर्ण के सोने की माषा बताओ।

न्यासः । $\frac{१०}{३}$ $\frac{१४}{१}$ $\frac{१६}{०}$ लब्धं माषमानम् १ ।

उदाहरण—वर्ण १०।१४।१६ | युतिजात वर्ण = १२
माषा ३।१।०

यहाँ सूत्र के अनुसार १२ को सोने का योग ३ + १ = ४ से गुणा किया तो ४८ हुआ, इसमें स्वर्णघ्नवर्णैक्य १० × ३ + १४ × १ = ४४ को घटाया तो ४८ − ४४ = ४ हुआ। इसे अज्ञात सोने का वर्ण १६ और युतिजात वर्ण १२ का अन्तर ४ से भाग देने पर ४ ÷ ४ = १ अज्ञात सुवर्ण का मान आया।

सुवर्णज्ञानायान्यत् करणसूत्रं वृत्तम् ।

साध्येनोनोऽनल्पवर्णो विधेयः साध्यो वर्णः स्वल्पवर्णोनितश्च ।
इष्टक्षुण्णे शेषके स्वर्णमाने स्यातां स्वल्पानल्पयोर्वर्णयोस्ते ॥१६॥

अनल्पवर्णः साध्येन ऊनः विधेयः, साध्यः वर्णः स्वल्पवर्णोनितः, शेषके इष्टक्षुण्णे ते क्रमेण स्वल्पानल्पयोः वर्णयोः स्वर्णमाने स्याताम् ।

अधिक वर्ण में साध्यवर्ण को और साध्य वर्ण में अल्पवर्ण को घटाकर दोनों शेषों को इष्ट से गुणा करने पर क्रम से अल्प और अधिक वर्ण की सुवर्ण संख्या होती है।

उपपत्तिः—अत्र कल्प्यते अनल्पवर्णः = अ । स्वल्पवर्णः = उ । अज्ञात-स्वर्णमाने क्रमेण य, क । साध्यवर्णः = सा·व । अत्र 'सुवर्णवर्णाहति योग-राशावि'त्यादिना—यु·व= $\frac{\text{अ} \times \text{य} + \text{उ} \times \text{क}}{\text{य} + \text{क}}$ = सा· व ।

∴ सा·व (य + क) = अ × य + उ × क = सा·व × य + सा·व × क ।

∴ सा·व × क − उ × क = अ × य − सा·व × य

= क (सा व − उ) = य (अ − सा·व)

∴ य = $\frac{\text{क (सा·व − उ)}}{\text{अ − सा·व}}$ ।

अत्र 'क्षेपाभावोऽथवायत्रे'त्यादिकुट्टकोक्त्या गुणलब्धी क्रमेण $\frac{\text{गु} = \text{००}}{\text{ल} = \text{००}}$

। 'इष्टाहतः स्वस्वहरेण युक्ते' इत्यादिना य, क माने क्रमेण य = (सा·व − उ)। क = इ (अ − सा· व) अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

हाटकगुटिके षोडशदशवर्णे तद्युतौ सखे जातम् ।
द्वादशवर्णसुवर्णं ब्रूहि तयोः स्वर्णमाने मे ? ॥ १ ॥

हे मित्र ! १६ और १० वर्ण वाले सोने की २ गुटिका को मिलाने से दि १२ वर्ण का सोना हो जाता है, तो दोनों सोने का मान मुझे बताओ ।

न्यासः । $\frac{१६}{०}$ $\frac{१०}{०}$ । साध्यो वर्णः १२ । कल्पितमिष्टम् १ । लब्धे वर्णमाने $\frac{१६}{२}$ $\frac{१०}{४}$ ।

अथवा द्विकेनेष्टेन $\frac{१६}{४}$ $\frac{१०}{८}$ । अर्धगुणितेन वा $\frac{१६}{१}$ $\frac{१०}{२}$ । एवं बहुधा ।

उदाहरण—यहाँ वर्ण १६, १० साध्यवर्ण = १२, इष्ट = १ । अब सूत्र के ुसार अनल्पवर्ण—साध्यवर्ण = १६ − १२ = ४ । साध्यवर्ण − अल्पवर्ण = २ − १० = २ । अब इष्ट १ से दोनों शेषों को गुणा करने से ४ × १ = ४ ल्पवर्ण और २ × १ = २ अनल्प वर्ण हुये ।

अथ छन्दश्चित्यादौ करणसूत्रं श्लोकत्रयम् ।

एकाद्येकोत्तरा अङ्का व्यस्ता भाज्याः क्रमस्थितैः ।
परः पूर्वेण संगुण्यस्तत्परस्तेन तेन च ॥ २० ॥
एकद्वित्र्यादिभेदाः स्युरिदं साधारणं स्मृतम् ।
छन्दश्चित्युत्तरे छन्दस्युपयोगोऽस्य तद्विदाम् ॥ २१ ॥
मूषावहनभेदादौ खण्डमेरौ च शिल्पके ।
वैद्यके रसभेदीये तन्नोक्तं विस्तृतेर्भयात् ॥ २२ ॥

एकाद्येकोत्तराः अङ्काः व्यस्ताः स्थाप्याः । ते क्रमस्थितैः अङ्कैः भाज्याः, परः पूर्वेण संगुण्यः, तेन तत्परः संगुण्यः, तेन च पुनः तत्परः संगुण्यः । एवं क्रमेण एकद्विन्यादि भेदाः स्युः । इदं साधारणं स्मृतम् । अस्य गणितस्य छन्दसि छन्दश्चित्युत्तरे, मूषावहनभेदादौ, खण्डमेरौ, शिल्पके, वैद्यके, रसभेदीये च तद्विदामुपयोगः भवति, तत् विस्तृतेः भयात् न उक्तम् ।

एकादि अङ्क के भेद जानने के लिये पहले संख्या पर्यन्त एकादिक अङ्क को उत्क्रम से लिखें । उनके नीचे संख्या पर्यन्त एकादिक अङ्क क्रम से हर की जगह में लिखकर पिछले अङ्क से आगे वाले को गुणा करे, फिर उससे आगे वाले अङ्क को गुणा करे । इस तरह संख्या पर्यन्त अङ्कों की उक्तरीति से गुणा करने पर एकादि अङ्क के भेद होते हैं । यह साधारण नियम है । छन्दःशास्त्र में छन्द के चित्युत्तर अर्थात् एकादि लघु वा गुरु जानने में, मूषावहन, खण्डमेरु, शिल्पशास्त्र और वैद्यशास्त्र में रस के भेद जानने में इसका उपयोग होता है । वे विस्तर के भय से यहाँ सभी के उदाहरण नहीं दिये गये ॥ १३ ॥

उपपत्तिः—यदि 'न'मितेषु वर्णेषु प्रतिवारं 'व'मितान् भिन्न-भिन्नवर्णानादाय प्रत्येकस्थाने स्थानस्यापरिवर्तनेन निवेश्यन्ते, तदा निवेशनप्रकारः कियन्मितो भवतीत्यस्य ज्ञानं क्रियते ।

कल्प्यन्ते—अ, क, ग, घ, च···इत्यादि 'न'संख्यकवर्णाः । अत्र न मितेषु वर्णेषु प्रतिवारमेकैकं वर्णं गृहीत्वा यदि स्थाप्यते तदा न संख्यक प्रकारैस्तेषां निवेशनं भवितुमर्हति, तेन प्रथमभेदस्तु पदतुल्यः । यद्युक्तवर्णेषु 'अ' गृहीत्वा शेषेषु (न—१) मितवर्णेषु प्रत्येकेन सह संयोगेन (न—१) मिताः स्थानद्वयभेदा यत्र सर्वत्र भेदादौ 'अ' वर्तते । एवं 'क' आदिवर्णानामपि क्रमेणैकैकं ग्रहणेन स्थानद्वयं न—१ मिता एव भेदा यत्र भेदादौ सर्वत्र क्रमेण क आदयो वर्णाः सन्ति । एवं कृते सति न मिता भेदपरम्पराः स्युरतः सर्वभेदयोगः = न (न—१)

परश्चात्र प्रतिभेदपरम्परायाः संदर्शनेन अक, कअ, अग, गअ, अघ, घअ इत्यादयो भेदाः वर्तन्ते, यत्र स्थानपरिवर्तितसमानवर्णद्वयविशिष्टभेदयोर्द्वयोर्द्वयोर्मध्ये एकस्यैवाङ्गीकारात्पूर्वोक्तभेदाद्विभक्ता जाता वास्तवभेदाः $= \frac{न(न-1)}{2}$

अत्रैव यदि प्रतिभेदे आदिमध्यावसानेषु ग तृतीयो वर्णो निवेश्यते तदा एकस्मिन् भेदे त्रयो भेदाः $\frac{न(न-१)}{२}$ मिता एव भवन्ति। एवं च इत्यादि-णेनापि $\frac{न(न-१)}{२}$ मिता भेदाः (न − २) स्थानपर्यन्तं जायन्ते । अतः भेदयोगः $\frac{न(न-१)(न-२)}{२}$ अत्रापि स्थानपरिवर्तितसमानवर्णत्रय-शिष्टभेदानां समावेशात् पूर्वभेदास्त्रिभक्ताः जाता वास्तवस्थानत्रयभेदाः $\frac{न(न-१)(न-२)}{२·३}$

एवं चतुःस्थानभेदाः $= \frac{न(न-१)(न-२)(न-३)}{२·३·४}$

एवमनयैव रीत्या व स्थानीयभेदाः =

$\frac{(न-१)(न-२)\ (न-३)\cdots\cdots\{न-(व-१)\}}{१·२·३·४\cdots\cdots व}$ अत उपपन्नम् ।

तत्र छन्दश्चित्युत्तरे किञ्चिदुदाहरणम् ।

प्रस्तारे मित्र ! गायत्र्याः स्युः पादे व्यक्तयः कति ।
एकादिगुरवश्चाशु कति कत्युच्यतां पृथक् ? ॥ १ ॥

हे मित्र ! प्रस्तार में गायत्री के प्रत्येक चरण में कितने व्यक्ति होंगे और एकादि गुरु की संख्या कितनी-कितनी होगी, यह शीघ्र कहो ।

इह हि षडक्षरो गायत्रीचरणोऽतः षडन्तानामेकाद्येकोत्तराङ्कानां व्यस्तानां क्रमस्थानां च ।

न्यासः । $\frac{६}{१}\ \frac{५}{२}\ \frac{४}{३}\ \frac{३}{४}\ \frac{२}{५}\ \frac{१}{६}$ ।

यथोक्तकरणेन लब्धा एकगुरुव्यक्तयः ६ । द्विगुरवः १५ । त्रिगुरवः २० । चतुर्गुरवः १५ । पञ्चगुरवः ६ । षड्गुरवः १ । अथैकः सर्वलघुः १ । एवमासामैक्यं पादव्यक्तिमितिः ६४ ।

एवं चतुश्चरणाक्षरसंख्यकानङ्कान् यथोक्तं विन्यस्य एकादिगुरुभेदानां नियतान् सैकानेकीकृत्य जाता गायत्रीवृत्तव्यक्तिसंख्या १६७७७२१६ । एवमुक्ताद्युत्कृतिपर्यन्तं छन्दसां व्यक्तिमितिर्ज्ञातव्या ।

उदाहरण—गायत्री के प्रत्येक चरण में ६ अक्षर होते हैं, अतः सूत्र के अनुसार न्यास करने पर—६, ५, ४, ३, २, १

१, २, ३, ४, ५, ६

$\therefore$ एक गुरु के व्यक्ति $= \frac{६}{१} = ६$

दो " " " $= \frac{६ \times ५}{१ \times २} = १५$

तीन " " " $= \frac{६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३} = २०$

चार " " " $= \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३}{१ \times २ \times ३ \times ४} = १५$

पाँच " " " $= \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५} = ६$

छः " " " $= \frac{६ \times ५ \times ४ \times ३ \times २ \times १}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६} = १$

और एक सर्व लघु होंगे।

$\therefore$ इनका योग करने पर चरण के व्यक्ति ६ + १५ + २० + १५ + ६ + १ = ६४। इसी तरह गायत्री के चारों चरणों के अङ्कों को जोड़कर इसका भेद निकालने पर वृत्त व्यक्ति की संख्या = १६७७७२१६।

उदाहरणं शिल्पे।

एकद्वित्र्यादिमूषावहनमितिमहो ब्रूहि मे भूमिभर्त्तु-
र्हर्म्ये रम्येऽष्टमूषे चतुरविरचिते श्लक्ष्णशालाविशाले।
एकद्वित्र्यादियुक्त्या मधुरकटुकषायाम्लकक्षारतिक्तै-
रेकस्मिन् षड्रसैः स्युर्गणक ! कति वद व्यञ्जने व्यक्तिभेदाः ? ॥२॥

हे गणक, चतुर जन से बनाये हुये, चौड़े दालान से सुशोभित आठ मुख वाले सुन्दर राज महल में १, २, ३, ४ आदि खिड़कियों को अलग-अलग खोलने से वायु के कितने भेद होंगे, तथा एक ही व्यञ्जन में मधुरादि छः रसों से १, २, ३, ४ आदि रसों के अलग-अलग योग से व्यक्ति भेद कितने कितने होंगे।

न्यासः। $\frac{८}{१}$ $\frac{७}{२}$ $\frac{६}{३}$ $\frac{५}{४}$ $\frac{४}{५}$ $\frac{३}{६}$ $\frac{२}{७}$ $\frac{१}{८}$।

लब्धा एकद्वित्र्यादिमूषावहनसंख्याः ८, २८, ५६, ७०, ५६, २८, ८, १। एवमष्टमूषे राजगृहे मूषावहनभेदाः २५५।

अथ द्वितीयोदाहरणे न्यासः $\frac{६}{१}$ $\frac{५}{२}$ $\frac{४}{३}$ $\frac{३}{४}$ $\frac{२}{५}$ $\frac{१}{६}$।

लब्धा एकादिरससंयोगेन पृथग्व्यक्तयः ६, १५, २०, १५, ६, १ । एतासामैक्यम् सर्वभेदाः ६३ ।

इति मिश्रकव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—प्रश्न के अनुसार $\left.\begin{matrix} ८, ७, ६, ५, ४, ३, २, १ \\ १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ \end{matrix}\right\}$ ऐसा न्यास कर सूत्र के अनुसार प्रथम भेद $\frac{८}{१} = ८$ । द्वि० भे० $= \frac{८ \times ७}{१ \times २} = २८$ । तृ० भे० $\frac{८ \times ७ \times ६}{१ \times २ \times ३} = ४ \times ७ \times २ = ५६$ । च० भे० $= \frac{८ \times ७ \times ६ \times ५}{१ \times २ \times ३ \times ४} = १४ \times ५ = ७०$ । पं० भे० $= \frac{८ \times ७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५} = ५६$ । इसी तरह छठा भेद = २८, ७वाँ भेद = ८, और ८वाँ भेद = १ । सब भेदों का योग = मूषा वहन भेद = २५५ । दूसरे उदाहरण में भी पूर्वोक्त रीति से १ से ६ तक निकालने पर क्रम से एकादि रसों की व्यक्ति संख्या ६, १५, २०, १५, ६, १ । इनका योग = ६३ = सर्वभेद ।

इति मिश्रकव्यवहारः समाप्तः ।

अथ श्रेढीव्यवहारः ।

तत्र सङ्कलितैक्ये करणसूत्रं वृत्तम् ।

सैकपदघ्नपदार्धमथैकाद्यङ्कयुतिः किल सङ्कलिताख्या ।
सा द्वियुतेन पदेन विनिघ्नी स्यात् त्रिहृता खलु सङ्कलितैक्यम् ॥१॥

सैकपदघ्नपदार्धं एकाद्यङ्कयुतिः सङ्कलिताख्या स्यात् । सा द्वियुतेन पदेन विनिघ्नी त्रिहृता तदा सङ्कलितैक्यं भवति ।

एक से जितनी संख्या तक का योग करना हो, उस अन्तिम संख्या को पद कहते हैं । पद में १ जोड़कर योगफल को पद के आधे से गुणा करें तो एक आदि अङ्कों का योग होता है । उस योग को सङ्कलित कहते हैं । उस सङ्कलित को द्वियुत पद से गुणा कर ३ से भाग दें, तो एक आदि अङ्कों के सङ्कलित का योग होता है ।

उपपत्तिः—सङ्कलितम् = सं० = १ + २ + ३ + ४ + ५ + ⋯⋯ + न
तथा सं० = न + (न − १) + (न − २) + (न − ३) + ⋯⋯⋯ १

अनयोर्योगः—

२ सं० = (न + १) + (न + १) + (न + १) ⋯ (न + १) न पर्यन्तम् ।
∴ २ सं० = न (न + १)
∴ सं० = $\frac{न (न + १)}{२}$ अत उपपन्नम् पूर्वार्धम् ।

यदि न = ३ तदा पूर्वयुक्त्या सङ्कलितम् $= \frac{३(३+१)}{२} = \frac{३^२}{२} + \frac{३}{२}$

एकोनपदसङ्कलितम् $= \frac{(न-१)^२ + (न-१)}{२}$

तथा द्व्यूनपदसङ्कलितम् $= \frac{(न-२)^२ + (न-२)}{२}$

एतेषां योगः सङ्कलितैक्यम्।

$= सं० ऐ० = \frac{एकादिवर्गयो + सं}{२}$

परञ्चात्र द्विघ्नपदं कुयुतं त्रिविभक्तमित्यादिना एकादिवर्गयोगः

$= \frac{(२\times न+१)}{३} \frac{(न+१)न}{२} = \frac{(२न+१)}{३} \times सं०$

$सं० ऐ० = \frac{(२न+१) सं + सं}{}$

$= \frac{सं०}{२}\left\{\frac{२न+१}{३} + १\right\} = \frac{सं०}{२}\left\{\frac{२न+१+३}{३}\right\}$

$= \frac{०(२न+४)}{२\times ३} = \frac{सं० \times २(न+२)}{२\times ३} = \frac{सं०(न+२)}{३}$

अत उपपन्नं सर्वम्।

अथ सङ्कलितैक्ययोगानयनम्।

सङ्कलितैक्यम् $= \frac{सं०(न+२)}{३} = \frac{न(न+१)}{२} \times \frac{(न+२)}{३}$

$= \frac{(न^२+न)(न+२)}{६} = \frac{न^३+न^२+२न^२+२न}{६} = \frac{न^३+३न^२+२न}{६}$

यद्यत्र न = १

तदा $सं० ऐ० = \frac{१^३+३\times १^२+२\times १}{६} = १$

यदि न = २ तदा $सं० ऐ० = \frac{२^३+३\cdot २^२+२\cdot २}{६} = ४$

यदि न = ३ तदा सं० ऐ० = $\dfrac{३^{३} + ३\cdot ३^{२} + २\cdot ३}{६}$ = १० एवमग्रेऽपि—

$\therefore$ सर्वेषां योगः = १ + ४ + १० + ……

$$= \frac{(१^{३}+२^{३}+३^{३}+\cdots) + (३\cdot १^{२}+३\cdot २^{२}+३\cdot ३^{२}\cdots) + २(१+२+३+\cdots)}{६}$$

$$= \frac{\text{घनयोग} + ३ \times \text{वर्गयोग} + २\ \text{सं०}}{६}$$

$$\therefore \text{सं० ऐ० यो०} = \frac{\text{घनयोग} + ३\cdot \text{वर्गयोग} + २\ \text{सं०}}{६}$$

परन्तु द्विघ्नपदं कुयुतमित्यादिसूत्रेण—व०यो० = $\dfrac{(२\text{न} + १)\ \text{सं०}}{३}$

तथा घनयोग = $(\text{सं०})^{२}$

$$\therefore \text{सं० ऐ० यो०} = \frac{(\text{सं०})^{२} + \dfrac{३(२\text{न}+१)\text{सं०}}{३} + २\ \text{सं०}}{६}$$

$$= \frac{(\text{सं})^{२} + (२\text{न}+१)\text{सं} + २\text{सं}}{६} = \frac{\text{सं}\{\text{सं} + (२\text{न}+१) + २\}}{६}$$

$$= \frac{\text{सं}\{\text{सं} + २\text{न} + ३\}}{६} = \frac{\text{सं}}{६} = \left\{\frac{\text{न}(\text{न}+१)}{२} + २\text{न} + ३\right\}$$

$$= \frac{\text{सं}}{६\times २}\left\{\text{न}^{२} + \text{न} + ४\text{न} + ६\right\} = \frac{\text{सं}}{१२}\left(\text{न}^{२} + ५\text{न} + ६\right)$$

$$= \frac{\text{सं}}{१२}\left\{\text{न}^{२} + ३\text{न} + २\text{न} + ६\right\} = \frac{\text{सं}}{१२}\left\{\text{न}(\text{न}+३) + २(\text{न}+३)\right\}$$

$$= \frac{\text{सं}}{१२}(\text{न}+२)(\text{न}+३) = \frac{\text{सं}(\text{न}+२)}{३} \times \frac{(\text{न}+३)}{४}$$

$$= \text{स०ऐ०} \times \frac{(\text{न}+३)}{४}$$ अनेन—

'रामयुक्तपदेनैव निघ्नं संकलितैक्यकम्।
वेदाप्तं योगमानं स्यात्स्फुटं संकलितैक्यजम् ॥'

इति सूत्रमुपपद्यते।

अथ सङ्कलितात्पदानयनम् ।

सङ्कलितम् = $सं० = \frac{न(न+१)}{२}$ अत्र पदमानम् = न,

$\therefore २ सं० = न(न+१) = न^2 + न$

पक्षौ चतुर्भिः संगुण्य रूपं प्रक्षिप्य जातौ

$८ सं० + १ = ४ न^2 + ४ न + १$

मूलग्रहणेन—

$\sqrt{८ सं० + १} = २ न + १$

$\therefore २ न = \sqrt{८ सं० + १} - १$

$\therefore न = \frac{\sqrt{८ सं० + १} - १}{२}$

अतः—सङ्कलितं वसुनिघ्नं रूपयुतं तत्पदं व्येकम् ।
दलितं तदेव कथितं पदमानं धीधनैर्नियतम् ॥

इत्युपपद्यते ॥

उदाहरणम् ।

एकादीनां नवान्तानां पृथक् सङ्कलितानि मे ।
तेषां सङ्कलितैक्यानि प्रचक्ष्व गणक द्रुतम् ? ॥ १ ॥

हे गणक, १ से लेकर ९ तक सभी अङ्कों के अलग-अलग सङ्कलित बताओ और उन्हीं अङ्कों के सङ्कलितैक्य भी कहो ।

न्यासः । १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ सङ्कलितानि १, ३, ६, १०, १५, २१, २८, ३६, ४५ एषामैक्यानि १, ४, १०, २०, ३५, ५६, ८४, १२०, १६५ ।

यहाँ १ से ९ तक का सङ्कलित लाना है,

अतः सूत्र के अनुसार १ का संकलित = $\frac{(१+१)\times १}{२} = \frac{२ \times १}{२} = १$

१ से २ तक का सङ्कलित = $\frac{(२+१)\times २}{२} = ३$

इसी तरह आगे भी क्रिया करने से १ से ९ तक सभी अङ्कों का अलग-अलग सङ्कलित = १, ३, ६, १०, १५, २१, २८, ३६, ४५ हुये ।

अब सङ्कलितैक्य के सूत्र से—१ का सङ्कलितैक्य

$$= \frac{१ \times (१ + २)}{३} = \frac{१ \times ३}{३} = १$$

१ से २ तक का सङ्कलितैक्य $= \frac{२ \times (२ + २)}{२} = ४$

१ से ३ तक का सङ्कलितैक्य $= \frac{६ \times (३ + २)}{३} = २ \times ५ = १०$

इसी तरह बनाने पर १ से ९ तक के अलग-अलग संकलितैक्य क्रम से १, ४, १०, २०, ३५, ५६, ८४, १२०, १६५ हुये।

कृत्यादियोगे करणसूत्रं वृत्तम्।

द्विघ्नपदं कुयुतं त्रिविभक्तं सङ्कलितेन हतं कृतियोगः।
सङ्कलितस्य कृतेः सममेकाद्यङ्कघनैक्यमुदीरितमाद्यैः॥ २॥

द्विघ्नपदं कुयुतं त्रिविभक्तं सङ्कलितेन हतं (तदा) कृतियोगः स्यात्। सङ्कलितस्य कृतेः समम् एकाद्यंकघनैक्यम् आद्यैः उदीरितम्।

पद को दूना कर १ जोड़कर ३ से भाग दें, लब्धि को सङ्कलित से गुणा करें तो एकादि अङ्कों का वर्गयोग होता है। सङ्कलित के वर्ग के समान एकादि अङ्कों का घनयोग आद्याचार्यों ने कहा है।

उपपत्तिः—$१^२ + २^२ + ३^२ + ४^२ + \cdots\cdots + प^२$ एषां योगः कर्तव्योऽस्ति तत्रैकाद्यङ्कानां सङ्कलितम् $= \frac{प(प+१)}{२} = \frac{प^२ + प}{२} = \frac{प^२}{२} + \frac{प}{२}$

अत्र यदि पद = १, तदा $\frac{प^२}{२} + \frac{प}{२} = \frac{१^२}{२} + \frac{१}{२}$

" = २ " $\frac{प^२}{२} + \frac{प}{२} = \frac{२^२}{२} + \frac{२}{२}$

$$\frac{प^२}{२} + \frac{प}{२} = \frac{३^२}{२} + \frac{३}{२}$$

एषां योगः = संकलितैक्यम् =

$$\frac{१^२ + २^२ + ३^२ + \cdots\cdots प^२}{२} + \frac{१ + २ + ३ + \cdots\cdots प}{२}$$

$= \frac{\text{व·यो} + \text{सं}}{२}$ । परञ्च पूर्वोक्तरीत्या संकलितैक्यम्

$= \frac{\text{सं}\,(\text{प} + २)}{३}$,

$\therefore \frac{\text{सं}\,(\text{प} + २)}{३} = \frac{\text{व·यो} + \text{सं}}{२}$,

$\therefore \text{व·यो} + \text{सं} = \frac{२\text{सं}\,(\text{प} + २)}{३}$

$\therefore \text{व·यो·} = \frac{२\text{सं}\,(\text{प} + २)}{३} - \text{सं} = \frac{२\text{सं·प} + ४\text{सं} - ३\text{सं}}{३} = \frac{२\text{सं·प} + \text{सं}}{३}$

$= \frac{\text{सं}\,(२\,\text{प} + १)}{३}$ अत उपपन्नं पूर्वार्धम् ।

अथ घनैक्यार्थं कल्प्यन्ते १, २, ३, ४............प

एते विलोमेन निवेशिताः प, (प−१), (प−२), (प−३), (प−४)···२, १

तत्रैषां चतुर्घाताः $\text{प}^४$, $(\text{प}-१)^४$, $(\text{प}-२)^४$, $(\text{प}-३)^४$, $(\text{प}-४)^४\cdots२^४$, $१^४$

अत्र प्रथमखण्डाद्द्वितीयं, द्वितीयात्तृतीयं, तृतीयाच्चतुर्थमेवं विशोधनेन

$\text{प}^४ - (\text{प}-१)^४ = \text{प}^४ - (\text{प}^४ - ४\,\text{प}^३ + ६\,\text{प}^२ - ४\,\text{प} + १) = ४\text{प}^३ - ६\,\text{प}^२ + ४\,\text{प} - १$

$(\text{प}-१)^४ - (\text{प}-२)^४ = ४\,(\text{प}-१)^३ - ६\,(\text{प}-१)^२ + ४\,(\text{प}-१) - १$

$(\text{प}-२)^४ - (\text{प}-३)^४ = ४\,(\text{प}-२)^३ - ६\,(\text{प}-२)^२ + ४\,(\text{प}-२) - १$

$(\text{प}-३)^४ - (\text{प}-४)^४ = ४\,(\text{प}-३)^३ - ६\,(\text{प}-३)^२ + ४\,(\text{प}-३) - १$

$(\text{प}-४)^४ - (\text{प}-५)^४ = ४\,(\text{प}-४)^३ - ६\,(\text{प}-४)^२ + ४\,(\text{प}-४) - १$

....

सर्वेषां योगः $\text{प}^४ - १ = ४\,\{\text{प}^३ + (\text{प}-१)^३ + (\text{प}-२)^३ + (\text{प}-३)^३ + \cdots + १^३\}$

$- ६\,\{\text{प}^२ + (\text{प}-१)^२ + (\text{प}-२)^२ + (\text{प}-३)^२ + \cdots\cdots + १^२\}$

$+ ४\,\{\text{प} + (\text{प}-१) + (\text{प}-२) + (\text{प}-३) + \cdots\cdots १\} - \text{प}$

वा $\text{प}^४ - १ = ४\,\text{घ·यो} - ६\,\text{व·यो} + ४\,\text{सं} - \text{प}$

वा $४\,\text{घ·यो} = \text{प}^४ + ६\,\text{व·यो} - ४\,\text{सं} + \text{प}$

$= \text{प}^४ + \frac{६\,(२\text{प}+१)\,\text{प}\,(\text{प}+१)}{३\times२} - \frac{४\,(\text{प}+१)\,\text{प}}{२} + \text{प}$

$$= प^४ + (२प + १)\,प\,(प + १) - २\,(प + १)\,प + प$$
$$= प^४ + (प + १)\,(२प^२ + प - २प)\,प + प$$
$$= प^४ + (प + १)\,(२प^२ - प) + प$$
$$= प^४ + २प^३ - प^२ + २प^२ - प + प$$
$$= प^४ + २प^३ + प^२ = (प^२ + प)^२$$
$$\therefore \text{घ· यो} = \frac{(प^२ + प)^२}{४} = \left\{\frac{प\,(प + १)}{२}\right\}^२$$

अत उपपन्नं सर्वम्।

उदाहरणम्।

तेषामेव च वर्गैक्यं घनैक्यं च वद द्रुतम्।
कृतिसङ्कलनामार्गे कुशला यदि ते मतिः॥ १॥

यदि तुम्हारी बुद्धि वर्गों के सङ्कलन मार्ग में कुशल है, तो उन्हीं (एकादि) अङ्कों के वर्गों का योग तथा घनों का योग शीघ्र कहो।

न्यासः। १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९। वर्गैक्यम् १, ५, १४, ३०, ५५, ९१, १४०, २०४, २८५। घनैक्यम् १, ९, ३६, १००, २२५, ४४१, ७८४, १२९६, २०२५।

उदाहरण—१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ इनका वर्गयोग करना है।

अब सूत्र के अनुसार—१ का वर्गयोग $= \frac{१ \times २ + १}{३} \times १ = १ \times १ = १$

१ से २ तक का वर्गयोग $= \frac{२ \times २ + १}{३} \times ३ = ५$

१ से ३ तकका वर्गयोग $= \frac{३ \times २ + १}{३} \times ६ = १४$

इसी तरह १ से ९ तक सभी अङ्कों के अलग-अलग वर्गयोग क्रम से १, ५, १४, ३०, ५५, ९१, १४०, २०४, २८५ हुये।

दूसरा उदाहरण—१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ इनका घनयोग करना है, तो सूत्र के अनुसार १ का घनयोग = १ के संकलित का वर्ग $= १^२ = १$

१ से २ तक का घनयोग $= ३^२ = ९$

१ से ३ तक का घनयोग $= ६^२ = ३६$

इसी तरह आगे भी करने से १ से ९ तक का अलग-अलग घनयोग क्रमसे-१, ९, ३६, १००, २२५, ४४१, ७८४, १२९६, २०२५ हुये।

यथोत्तरचयेऽन्त्यादिधनज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम्।

व्येकपदघ्नचयो मुखयुक् स्यादन्त्यधनं मुखयुग्दलितं तत्।
मध्यधनं पदसंगुणितं तत् सर्वधनं गणितं च तदुक्तम्॥ ३॥

व्येकपदघ्नचयः मुखयुक् तदा अन्त्यधनं स्यात्, तत् (अन्त्यधनं) मुखयुक् दलितं मध्यधनं भवति, तत् (मध्यधनं) पदसंगुणितं सर्वधनं भवति, तदेव गणितं च उक्तम्।

१ से घटे हुए पद (गच्छ) को चय से गुणाकर आदि जोड़ दें तो अन्त्यधन होता है। उस अन्त्यधन में आदि जोड़कर उसका आधा करें, तो मध्यधन होता है। उस मध्यधन को गच्छ से गुणा करने पर सर्वधन होता है, उसे गणित भी कहते हैं।

उपपत्ति—आदिः = आ, चयः = च, गच्छः = न, अन्त्यधनम् = अ· ध· मध्यधनम् = म· ध·, सर्वधनम् = स· ध·।

तद्याऽऽलापानुसारेण—

स· ध· = आ + (आ + च) + (आ + २च) + ······ + आ + (न − १) च

वा स· ध· = {आ + (न − १)च} + {आ + (न − २) च} + आ + (न − ३)च + ········· + आ।

∴ २ स· ध· = {२ आ + (न − १) च} + {२ आ + (न − १) च} + ········· न पर्यन्तम्। वा २ स· ध· = {२ आ + (न − १) च} न

∴ स· ध· = $\frac{\text{न}}{२}$ {२ आ + च (न − १)}

अत्र अं· ध· = आ + च (न − १), म· ध· = $\frac{\text{२ आ + च (न − १)}}{२}$

= $\frac{\text{आ + अ· ध·}}{२}$।

∴ स· ध· = न· म· ध।

अत्र मध्यदिनसम्बन्धिधनं मध्यधनमुच्यतेऽतः समदिने गच्छे मध्य-दिनाभावान्मध्यात्प्राक्परेत्यादि भास्करोक्तमुपपद्यते।

उदाहरणम् ।

आद्ये दिने द्रम्मचतुष्टयं यो दत्त्वा द्विजेभ्योऽनुदिनं प्रवृत्तः ।
दातुं सखे ! पञ्चचयेन पक्षे द्रम्मा वद द्राक् कति तेन दत्ताः ? ॥१॥

हे मित्र, किसी दाता ने ब्राह्मणों को पहले दिन ४ द्रम्म देकर प्रतिदिन ५ बढ़ाकर देने के लिये प्रवृत्त हुआ, तो १५ दिन में उसने कितना दिया, वह शीघ्र कहो।

न्यासः । आ. ४ । च. ५ । ग. १५ । अन्त्यधनम् ७४ । मध्यधनम् ३९ । सर्वधनम् ५८५ ।

उदाहरण—आ. ४ । च. ५ । गच्छ १५ ।

सूत्र के अनुसार—(१५ − १) = १४ । १४ × ५ = ७० । ७० + ४ = ७४ = अन्त्यधन । ७४ + ४ = ७८ ÷ २ = ३९ मध्यधन । ३९ × १५ = ५८५ सर्वधन हुआ ।

उदाहरणम् ।

आदिः सप्त चयः पञ्च गच्छोऽष्टौ यत्र तत्र मे ।
मध्यान्त्यधनसंख्ये के वद सर्वधनं च किम् ? ॥ २ ॥

जहाँ आदि ७, चय ५ और गच्छ ८ है, वहाँ अन्त्यधन, मध्यधन और सर्वधन क्या होगा यह कहो ।

न्यासः । आ. ७ । च. ५ । ग. ८ । मध्यधनम् $\frac{४९}{२}$ ।
अन्त्यधनम् ४२ । सर्वधनम् १९६ ।

समदिने गच्छे मध्यदिनाभावान्मध्यात् प्रागपरदिनधनयोर्योगार्धं मध्यदिनधनं भवितुमर्हतीति प्रतीतिरुत्पाद्या ।

उदाहरण—आदि ७, चय ५, गच्छ ८ ।

सूत्र के अनुसार—८ − १ = ७ । ७ × ५ = ३५ । ३५ + ७ = ४२ अन्त्यधन । ४२ + ७ = ४९ । $\frac{४९}{२}$ मध्यधन । $\frac{४९}{२}$ × ८ = ४९ × ४ = १९६ सर्वधन ।

मुखज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

गच्छहृते गणिते वदनं स्याद्व्येकपदघ्नचयार्धविहीने ।

गणिते (सर्वधने) गच्छहृते व्येकपदघ्नचयार्धविहीने सति वदनं स्यात् ।

सर्वधन में गच्छ से भाग देकर लब्धि में १ घटे हुए पद से गुणे हुये चय का आधा घटा दें तो आदि होता है ।

उपपत्ति :—कल्प्यते आदिः = य ।

तदा व्येकपदघ्नचयो मुखयुगेत्यादिना $स\cdot ध\cdot = \{ २ य + (न - १) च \} \frac{न}{२}$ ।

$\therefore २ स\cdot ध\cdot = \{ २ य + (न - १) च \} न$ ।

$\therefore \frac{२ स\cdot ध\cdot}{न} = २ य + (न - १) च$ ।

$\therefore २ \; य = \frac{२ स\cdot ध\cdot}{न} - (न - १) च$ ।

$\therefore य = \frac{२ स\cdot ध\cdot}{२ न} - \frac{(न - १) च}{२}$ ।

$= \frac{स\cdot ध\cdot}{न} - \frac{(न - १) च}{२}$ अतउपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

पञ्चाधिकं शतं श्रेढीफलं सप्त पदं किल ।
चयं त्रयं वयं विद्मो वदनं वद नन्दन ! ॥ १ ॥

हे नन्दन, जहाँ सर्वधन १०५, गच्छ ७, और चय ३ है वहाँ आदि धन बताओ ।

न्यासः । आ.० । च. ३ । ग. ७ । ध. १०५ । आदिधनम् ६ । अन्त्य-धनम् २४ । मध्यधनम् १५ ।

उदाहरण—आ० । च ३ । गच्छ ७ । सर्वधन १०५ ।

अब सूत्र के अनुसार—$१०५ \div ७ = १५$ । $१५ - (७ - १) \times \frac{३}{२}$ $= १५ - \frac{६ \times ३}{२} = १५ - ३ \times ३ = १५ - ९ = ६$ आदि ।

$\therefore$ अन्त्यधन = २४ । मध्यधन = १५ ।

चयज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

गच्छहृतं धनमादिविहीनं व्येकपदार्धहृतं च चयः स्यात् ॥४॥

धनं (सर्वधनं) गच्छहृतम्, आदि विहीनं व्येकपदार्धहृतं चयः स्यात् ।

सर्वधन में गच्छ से भाग देकर, लब्धि में आदि घटाकर, शेष में १ घटे हुये गच्छ के आधे से भाग देने पर लब्धि चय होता है।

उपपत्तिः—अत्र कल्प्यते चयः = य,

तदा पूर्वयुक्त्या सर्वधनम् $= \{ २ \text{आ} + (\text{न} - १) \text{य} \} \dfrac{\text{न}}{२}$

तदा $\dfrac{२ \text{स·ध·}}{\text{न}} = २ \text{आ} + (\text{न} - १) \text{य}$

$$\therefore \text{य} (\text{न} - १) = \frac{२ \text{स·ध·}}{\text{न}} - २ \text{आ} = २\left(\frac{\text{स·ध·}}{\text{न}} - \text{आ·} \right)$$

$$\therefore \text{य} = \frac{२ \left(\frac{\text{स·ध·}}{\text{न}} - \text{आ} \right)}{(\text{न} - १)} = \frac{\left(\frac{\text{स·ध·}}{\text{न}} - \text{आ} \right)}{\frac{(\text{न} - १)}{२}}$$

अत उपपन्नम्।

उदाहरणम्।

प्रथममगमदह्वा योजने यो जनेश-
स्तदनु ननु कयाऽसौ ब्रूहि यातोऽध्ववृद्ध्या।
अरिकरिहरणार्थं योजनानामशीत्या
रिपुनगरमवाप्तः सप्तरात्रेण धीमन्?॥ १॥

हे बुद्धिमन्, कोई राजा पहले दिन दो योजन (८ कोश) चला। उसके बाद वह कितने योजन की वृद्धि से प्रतिदिन चला कि सात रात में ८० योजन पर स्थित शत्रु के हाथी को अपहरण करने के लिए शत्रुनगर में पहुँच गया?

न्यासः। आ. २। च. ०। ग. ७। ध. ८०। लब्धमुत्तरम् $\frac{२२}{७}$। अन्त्यधनम्। $\frac{१५६}{७}$ मध्यधनम् १५।

उदाहरण—आदि २। चय ०। गच्छ ७। सर्वधन ८०।

अब सूत्र के अनुसार—$८० \div ७ = \frac{८०}{७}$। $\frac{८०}{७} - २ = \frac{८० - १४}{७} = \frac{६६}{७}$।

$\frac{६६}{७} \div \left(\frac{७ - १}{२} \right) = \frac{६६}{७} \div \frac{६}{२} = \frac{\cancel{६६}^{११}}{७} \times \frac{२}{\cancel{६}} = \frac{२२}{७} =$ चय।

अब $७ - १ = ६$। $६ \times \frac{२२}{७} = \frac{१३२}{७}$। $\frac{१३२}{७} + २ = \frac{१३२ + १४}{७} = \frac{१४६}{७}$ $=$ अ· ध·। $\frac{१४६}{७} + २ = \frac{१४६ + १४}{७} = \frac{१६०}{७}$। $\frac{१६०}{७ \times २} = \frac{८०}{७}$ मध्यधन।

गच्छज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

श्रेढीफलादुत्तरलोचनघ्नाच्चयार्धवक्त्रान्तरवर्गयुक्तात् ।
मूलं मुखोनं चयखण्डयुक्तं चयोद्धृतं गच्छमुदाहरन्ति ॥५॥

श्रेढीफलात् (सर्वधनात्) उत्तर लोचनघ्नात (द्विघ्नचयगुणितात्) शेषं स्पष्टम् ।

सर्व धन को चय और २ से गुणा कर गुणन फल में चय का आधा और आदि के अन्तर वर्ग जोड़ कर वर्ग मूल लें। मूल में आदि घटा कर, शेष में चय का आधा जोड़ दें और योग फल में चय से भाग दें, तो गच्छ होता है।

उपपत्तिः—कल्प्यते आदिः = आ, चयः = च, गच्छः = य ।

तदा सर्वधनम् = स· ध· = $\{ २ \text{ आ} + (\text{य} - १) \text{च} \} \frac{\text{य}}{२}$

$\therefore २ \text{ स· ध·} = \{ २ \text{ आ} + (\text{य} - १) \text{च} \} \text{य}$

$= २ \text{ आ·य} + (\text{य} - १) \text{य· च·} = २ \text{ आ· य} + \text{य}^{२} \text{च} - \text{य च}$

$\therefore २ \text{ स· ध·} \times \text{च} = २ \text{ आ} \times \text{य} \times \text{च} + \text{य}^{२} \times \text{च}^{२} - \text{य} \times \text{च}^{२}$

$= \text{य}^{२} \times \text{च}^{२} + २ \text{ य} \times \text{च} \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)$

पक्षौ $\left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)^{२}$ अनेन युक्तौ जातौ

$२ \text{ स· ध·} \times \text{च} + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)^{२} = \text{य}^{२} \times \text{च}^{२} + २ \text{ य} \times \text{च} \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right) + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)^{२}$

वा $२ \text{ स· ध·} \times \text{च} + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)^{२} = \left\{ \text{य} \times \text{च} + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right) \right\}^{२}$

$\therefore \sqrt{२ \text{ स· ध·} \times \text{च} + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)^{२}} = \text{य} \times \text{च} + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)$

$\because \text{य} \times \text{च} = \sqrt{२ \text{ स· ध·} \times \text{च} \quad \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)^{२}} - \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)$

$= \sqrt{२ \text{ स· ध·} \times \text{च} + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२} \right)^{२}} - \text{आ} + \frac{\text{च}}{२}$

$$\therefore \text{य} = \frac{\sqrt{२\text{ स}\cdot\text{ ध}\cdot \times \text{च} + \left(\text{आ} - \frac{\text{च}}{२}\right)^{२}} - \text{आ} + \frac{\text{च}}{२}}{\text{च}}$$

अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

द्रम्मत्रयं यः प्रथमेऽह्नि दत्त्वा दातुं प्रवृत्तो द्विचयेन तेन ।
शतत्रयं षष्ट्यधिकं द्विजेभ्यो दत्तं कियद्भिर्दिवसैर्वदाशु ? ॥ १ ॥

किसी दाता ने ब्राह्मणों को पहले दिन ३ द्रम्म देकर प्रतिदिन २ द्रम्म ढ़ाकर देने के लिये उद्यत हुआ, तो उसने ३६० द्रम्म कितने दिनों में दिया, ह शीघ्र कहो ।

न्यासः । आ. ३ । च. २ । ग. ० । ध. ३६० । अन्त्यधनम् ३७ । ध्यधनम् २० । लब्धो गच्छः १८ ।

उदाहरण—आदि ३ । चय २ । गच्छ ० । सर्वधन ३६० । अब सूत्र के नुसार—$३६० \times २ = ७२०$ । $७२० \times २ = १४४०$ । $१४४० + \left(३ - \frac{२}{२}\right)^{२} =$ $१४४० + (३ - १)^{२} = १४४० + २^{२} = १४४० + ४ = १४४४$ । $\sqrt{१४४४} =$ ३८ । $३८ - ३ = ३५$ । $३५ + \frac{२}{२} = ३५ + १ = ३६$ । $३६ \div २ = १८$ गच्छ ।

अब अन्त्यधन $= (१८ - १)\ २ + ३ = १७ \times २ + ३ = ३४ + ३ =$ ३७ । मध्यधन $= \frac{३७+३}{२} = \frac{४०}{२} = २०$ ।

अथ द्विगुणोत्तरादिवृद्धौ फलानयने करणसूत्रं सार्धार्या ।

विषमे गच्छे व्येके गुणकः स्थाप्यः समेऽर्धिते वर्गः ।
गच्छक्षयान्तमन्त्याद् व्यस्तं गुणवर्गजं फलं यत् तत् ॥ ६ ॥
व्येकं व्येकगुणोद्धृतमादिगुणं स्याद्गुणोत्तरे गणितम् ।

विषमे गच्छे व्येके गुणकः स्थाप्यः समे (गच्छे) अर्धिते वर्गः (स्थाप्यः) वं गच्छक्षयान्तं (गुणवर्गौ स्थाप्यौ) । अन्त्यात् व्यस्तं गुणवर्गजं यत् फलं त् व्येकं, व्येकगुणोद्धृतं आदिगुणं (तदा) गुणोत्तरे गणितं स्यात् ।

(द्विगुण, त्रिगुण आदि चय वाली श्रेढ़ी में) यदि गच्छ विषम संख्या हो, उसमें १ घटाकर गुणक लिखें । यदि गच्छ सम (२, ४, ६ आदि) हो,

तो उसका आधा करके वर्ग लिखें। (इस तरह १ घटाने और आधे करने से भी यदि विषमाङ्क हो, तो गुणक चिन्ह और यदि समाङ्क हो, तो वर्ग चिन्ह करना चाहिये। इस प्रकार जब तक पद की कुल संख्या समाप्त न हो जाय, तब तक करना चाहिये। तब अन्त्य चिन्ह से उलटा गुणक और वर्गफल आधा चिन्ह तक साधन कर, उसमें १ घटाकर, शेष को गुणक में १ घटा कर उससे भाग दें। लब्धि को आदि से गुणा करें तो सर्वधन होता है।

उपपत्तिः—अत्रालापानुसारेणसर्वधनम्—

$$\text{स· ध·} = \text{आ} + \text{आ· गु} + \text{आ· गु}^{२} + \text{आ· गु}^{३} + \cdots\cdots \text{आ· गु}^{(\text{न} - १)}$$

$$\therefore\ \text{गु·}\times\text{स· ध·} = \text{आ· गु} + \text{आ· गु}^{२} + \text{आ· गु}^{३} + \cdots + \text{आ· गु}^{\text{न} - १} + \text{आ· गु}^{\text{न}}$$

$$\therefore\ \text{स· ध·}\,(\text{गु} - १) = \text{आ· गु}^{\text{न}} - \text{आ}\,(\text{गु}^{\text{न}} - १)$$

$$\therefore\ \text{स· ध·} = \frac{\text{आ}\,(\text{गु}^{\text{न}} - १)}{\text{गु} - १}$$

अत्र यदि 'न' विषम संख्याऽस्ति तदा (न − १) सम संख्या स्यात्।

$$\therefore\ \text{गु}^{\text{न}} = \text{गु· गु}^{\text{न}-१} = \text{गु}\,\{\text{गु}^{\frac{\text{न}-१}{२}}\}^{२}$$ अत उपपन्नम्।

उदाहरणम्।

पूर्वं वराटकयुगं येन द्विगुणोत्तरं प्रतिज्ञातम्।
प्रत्यहमर्थिजनाय स मासे निष्कान् ददाति कति? ॥ १ ॥

किसी दाता ने पहले दिन २ वराटक किसी याचक को देकर प्रतिदिन द्विगुणित करके देने की प्रतिज्ञा की, तो ३० दिन में उसने कितने निष्कों का दान किया।

न्यासः। आ. २। च. २। ग ३०।

लब्धा वराटकाः २१४७४८३६४६। निष्कवराटकाभिर्भक्ता जाता-निष्काः १०४८५७। द्रम्माः ६। पणाः ६। काकिण्यौ २। वराटकाः ६।

उदाहरण—आदि २ । चय २ । गच्छ ३० ।

यहाँ गच्छ ३० है । इसको सम होने के कारण $\frac{३०}{२}$ = १५ को वर्ग लिखा । र १५ विषम है, अतः (१५–१) = १४ को गुणक लिखा । फिर १४ सम या है, अतः $\frac{१४}{२}$ = ७ को वर्ग लिखा । फिर ७ में १ घटाने से ६ हुआ । े गुणक लिखा, फिर ६ का आधा ३ को वर्ग लिखा, फिर ३ में १ घटाकर २ हुआ, इसको गुणक लिखा । फिर २ का आधा १ को वर्ग लिखा और १ में १ घटाने से ० हुआ इसे गुणक लिखा । गुणक की जगह २ लिखकर अन्तिम से उलटे ऊपर की ओर क्रिया करने पर १०७३७४१८२४ हुआ । इसमें १ घटाया तो १०७३७४१८२३ हुआ । इसमें एकोन गुण (२–१) १ से भाग दिया, तो १०७३७४१८२३ हुआ । इसको आदि २ से गुणा किया तो २१४७४८३६४६ वराटक हुये ।

१५	वर्ग	१०७३७४१८२४
१४	गुणक	३२७६८
७	वर्ग	१६३८४
६	गुणक	१२८
३	वर्ग	६४
२	गुणक	८
१	वर्ग	४
०	गुणक	२

इसको २० से भाग देने पर शेष ६ वराटक । लब्धि १०७३७४१८२ ाकिणी। इसको ४ से भाग देने पर शेष २ काकिणी । लब्धि २६८४३५४५ पण । १६ से भाग देने पर शेष ९ पण। लब्धि १६७७७२१ द्रम्म को १६ से भाग ने पर शेष ९ द्रम्म । लब्धि १०४८५७ निष्क हुआ ।

इनको क्रम से लिखने पर—सर्वधन = १०४८५७ निष्क, ९ द्रम्म, ९ पण, काकिणी, ६ वराटक ।

उदाहरणम् ।

आदिर्द्विकं सखे ! वृद्धिः प्रत्यहं त्रिगुणोत्तरा ।
गच्छः सप्तदिनं यत्र गणितं तत्र किं वद ॥ २ ॥

हे मित्र, जहाँ आदि २, त्रिगुणोत्तर चय और गच्छ ७ दिन हैं, वहाँ वंधन क्या होगा यह कहो ।

न्यासः । आ. २ । च. ३ । ग. ७ । लब्धं गणितम् २१८६ ।

उदाहरण— आदि २ । चय ३ । गच्छ ७ ।

अब सूत्र के अनुसार गुणक और वर्ग स्थापित करने पर निम्नलिखित

रूप हुआ। अब अन्तिम गुणक की जगह ३ लिखकर नीचे से ऊपर की ओर उलटी क्रिया करने से २१८७ हुआ। इसमें १ घटाने पर २१८६ हुआ। इसको व्येक गुणक = (३ – १) = २ से भाग दिया, और लब्धि फिर आदि २ से ही गुणा भी किया तो २१८६ ही रहा।

६ गुणक २१८७
३ वर्ग ७२९
२ गुणक २७
१ वर्ग ९
० गुणक ३

∴ सर्वधन = २१८६।

अनन्तपदे सर्वधनसूत्रम्।
आदिर्गुणविहीनेन रूपेण प्रविभाजितः।
फलं गुणोत्तरे सर्वधनमानन्त्यके पदे॥

अस्योपपत्तिः—गुणोत्तर श्रेढ्याः सर्वधनम् $=\frac{आ\left(गु^{न}-१\right)}{गु-१}$ ······(१)

अत्र यदि $गु<१$ तथा 'न' धनात्मिका भवेत्तदा

(१) समीकरणे स· ध· $=\frac{आ\left(१-गु^{न}\right)}{१-गु}$ अत्र न मानं यथा यथाऽधिकं स्यात्तथा $गु^{न}$ अस्यमानमल्पं स्याद्गुणकस्य रूपाल्पत्वादत एव परमाधिकेऽनन्त समे न माने $गु^{न}$ अस्य मानं परमाल्पं शून्यसमं भवत्यतस्तत्र स· ध· $=$ $\frac{आ\left(१-०\right)}{१-गु}=\frac{आ}{१-गु}$ अत उपपन्नम्।

उदाहरण—यदि आदि १, चय $\frac{१}{३}$ और गच्छ अनन्त है, तो उस गुणोत्तर श्रेढ़ी का सर्वधन बताओ।

यहाँ सूत्र के अनुसार—स·ध· $=\frac{आ}{१-गु}=\frac{१}{१-\frac{१}{३}}=\frac{१}{\frac{२}{३}}=\frac{३\times१}{२}=\frac{३}{२}$।

समादिवृत्तज्ञानाय करणसूत्रं सार्धार्या।
पादाक्षरमितगच्छे गुणवर्गफलं चये द्विगुणे॥ ७॥
समवृत्तानां संख्या तद्वर्गो वर्गवर्गश्च।
स्वस्वपदोनौ स्यातामर्धसमानां च विषमाणाम्॥ ८॥

पादाक्षरमितगच्छे द्विगुणे चये गुणवर्गजं फलं समवृत्तानां संख्या स्यात्। तद्वर्गः वर्गवर्गश्च कार्यः, तौ स्वस्वपदोनौ तदा क्रमेण अर्धसमानां विषमाणां च संख्ये स्याताम्।

किसी छन्द के एक चरण में जितने अक्षर हों, उनको गच्छ और द्विगुणितोत्तर चय मान कर 'विषमे गच्छे व्येके' इत्यादि प्रकार से जो गुणवर्गज फल हो, वह समवृत्त की संख्या होती है। उस संख्या के वर्ग और वर्ग वर्ग करके दो जगह रख कर दोनों में अपना-अपना मूल घटा देने से क्रम से अर्धसमवृत्त और विषमवृत्त की संख्यायें होती हैं।

उपपत्तिः—अत्रैकाद्येकोत्तरा अङ्का व्यस्ता भाज्या क्रमस्थितैरित्यादिसूत्रेणैकादिगुरुलघुवशेन ये भेदास्तेषां योगो रूपयुतः सर्वभेदयोगो भवति। तत्तुल्या एव समवृत्तभेदास्ते $२^{न}$ एतत्तुल्या भवन्त्यत उक्तं 'पादाक्षरेत्यादि समवृत्तानां संख्यान्तम्।

अथ समवृत्तभेदेषु $२^{न}$ मितेषु द्वौ द्वौ भेदौ गृहीत्वाऽङ्कपाशीया ये भेदास्तेऽर्धसमवृत्तभेदाः $= २^{न}\left(२^{न}-१\right) = २^{२न} - २^{न}$। एवं समवृत्तभेदवर्गतुल्ये भेदमाने येऽर्धसमवृत्तभेदास्त एव भास्करीय विषमवृत्तभेदाः $= २^{२}\left(२^{न}-१\right)$ $= \left(२^{न}\right)^{२} - २^{न}$। अत उपपन्नं सर्वम्।

अत्राचार्येणैकचरणे एकलक्षणं, चरणत्रये तद्भिन्नलक्षणमिति लक्षणद्वयोपेत वृत्तं विषमवृत्तं मत्वा विषमवृत्तभेदाः साधितास्तेन छन्दःशास्त्रोक्त विषमवृत्तभेदास्तद्भिन्ना, विषमवृत्तलक्षणं तु—

'यस्य पादे चतुष्केऽपि लक्ष्म भिन्नं परस्परम्।
तदाहुर्विषमं वृत्तं छन्दः शास्त्र विशारदाः॥'

अतस्तद्भेदानयनार्थमुपायः प्रदर्श्यते—मिथश्चिह्नभिन्नेषु समवृत्तभेदेषु चतुरश्चतुरो भेदानादायाङ्कपाशीया भेदा ये, त एव वास्तवाविषमवृत्तभेदाःस्युरतस्तद्रूपम्—$भे\,(भे-१)\,(भे-२)\,(भे-३)$

$= भे\,(भे^{२} - भे - २भे + २)\,(भे - ३)\cdots\cdots$

$= भे\,(भे^{3} - ३भे^{२} + २भे - ३भे^{२} + ९भे - ६)$

$= \text{भे}^4 - 6\text{भे}^3 + 11\text{भे}^2 - 6\text{भे} \cdots\cdots (1)$

$= \text{भे}^4 - 6\text{भे}^3 + 11\text{भे}^2 - 6\text{भे} + 1 - 1$

$= (\text{भे}^2 - 3\text{भे} + 1)^2 - 1$

$= (\text{अर्धसमवृत्तभेद} - 2\ \text{समवृत्तभेद} + 1)^2 - 1$

एतेन—समवृत्तजभेदेन द्विगुणेनेत्यादि विशेषोक्तमुपपद्यते।

अथ $\text{वि· वृ· भे·} = \text{भे}^4 - 6\text{भे}^3 + 11\text{भे}^2 - 6\text{भे}$

$= \text{भे}^4 - \text{भे}^2 - 6\text{भे}\,(\text{भे}^2 - 2\text{भे} + 1)$

$= \text{भास्करीय वि· वृ· भे·} - 6\text{भे}\,(\text{भे} - 1)^2$

अनेन—

समवृत्तभवो भेदो निरेकस्तत्कृतिर्हता। समवृत्तजभेदेन रसघ्नेन तदूनितः।
भेदः श्रीभास्करोक्तानां विषमाणां भवेद्ध्रुवम्। वृत्तरत्नाकरोक्तानामसमानां सदैव हि॥

इत्युपपद्यते।

उदाहरणम्।

समानामर्धतुल्यानां विषमाणां पृथक् पृथक्।
वृत्तानां वद मे संख्यामनुष्टुपछन्दसि द्रुतम्?॥ १॥

अनुष्टुप् छन्द में सम, अर्धसम और विषम वृत्तों के भेद अलग-अलग बताओ।

न्यासः। उत्तरो द्विगुणः २। गच्छः ८। लब्धाः समवृत्तानां संख्याः २५६। तथाऽर्धसमानां च ६५२८०। विषमाणां च ४२९४९०१७६०।

इति श्रेढीव्यवहारः समाप्तः।

उदाहरण—द्विगुण चय, गच्छ ८, अब 'विषमे गच्छे' इत्यादि सूत्र के अनुसार गुण और वर्ग को न्यास करने पर तथा नीचे से ऊपर की ओर क्रिया करने से गुणवर्गज फल = २५६ = समवृत्तभेद। अब समवृत्तभेद का वर्ग तथा वर्ग वर्ग करने से क्रम से ६५५३६ और ४२९४९६७२९६ हुये। इनमें क्रम से अपना अपना वर्गमूल घटाने पर क्रम से अर्ध समवृत्तभेद ६५२८० और विषमवृत्तभेद = ४२९४-९०१७६०।

गच्छ = ८
४ वर्ग २५६
२ वर्ग १६
१ वर्ग ४
० गुणक २

इति श्रेढीव्यवहारः समाप्तः।

अथ परिशिष्टम्

(१) उस पद समूह को, जिसमें दो लगातार पदों का अन्तर हमेशा समान हो, समान्तर श्रेढ़ी कहते हैं।

यथा—२, ५, ८, ११............इत्यादि।

इसमें दो लगातार पदों के अन्तर ३ होने के कारण यह समान्तर श्रेढ़ी है।

(२) उदाहरण—१, ३, ५, ७, ९, ११............इत्यादि न पदों का योग करना है।

यहाँ आदि = १, चय = २ और गच्छ = न

$\therefore$ इन संख्याओं का योग = $\frac{न}{२}\{२\,आ + (न-१)\,च\}$

$= \frac{न}{२}\{२\times१+(न-१)\times२\} = \frac{न}{२}\{२+२\,न-२\}$

$= \frac{न}{२}\times२\,न = न^{२}$

इससे सिद्ध होता है कि एकादि विषम संख्याओं के योग उस पद के वर्ग के बराबर होता है जितने पद उस श्रेढ़ो में रहते हैं।

(३) उदाहरण—२, ४, ६, ८, १०............आदि न पदों का योग करना है।

यहाँ आदि = २, चय = २, गच्छ = न

$\therefore$ इनका योग = $\frac{न}{२}\{२\,आ+(न-१)\,च\}$

$= \frac{न}{२}\{२\times२+(न-१)\times२\} = \frac{न}{२}\{४+२\,न-२\}$

$= \frac{न}{२}\{२\,न+२\} = \frac{न\,(न+१)\times२}{२} = न\,(न+१)$

(४) किसी समान्तर श्रेढ़ी का सङ्कलित १३६ है, तो उसमें कितने पद हैं।

यहाँ सङ्कलित = १३६, तो सूत्र के अनुसार—

$$पद = \frac{\sqrt{संकलित\times८+१}-१}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{१३६\times८+१}-१}{२} = \frac{\sqrt{१०८८+१}-१}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{१०८९}-१}{२} = \frac{३३-१}{२} = \frac{३२}{२} = १६$$

$\therefore$ पद = १६ उत्तर।

(५) $(२ \times १)+(३ \times २)+(४ \times ३)+(५ \times ४)+\cdots(न+१)न$

इस श्रेढी को हम निम्नलिखित रूप से लिख सकते हैं—

$(१^२+१)+(२^२+२)+(३^२+३)+(४^२+४)+\cdots\cdots$
$(न^२+न)$

$=(१^२+२^२+३^२+\cdots\cdots न^२)+(१+२+३+४+\cdots+न)$

$=\frac{(२न+१)न(न+१)}{६}+\frac{न(न+१)}{२}=\frac{न(न+१)}{२}$
$\{२न+१+१\}$

$=\frac{न(न+१)}{२}\{२न+२\}=\frac{न(न+१)(न+१)२}{२}$

$=न(न+१)^२$

(६) $१+९+२९+६७+\cdots\cdots$ इनका योग करना है।

उक्त श्रेढी $=(१^३+०)+(२^३+१)+(३^३+२)+(४^३+३)+\cdots$
$(न^३+न-१)$

$=(१^३+२^३+३^३+४^३+\cdots\cdots+न^३)+\{१+२+३+\cdots\cdots$
$(न-१)\}$

$=\left\{\frac{न(न+१)}{२}\right\}^२+\{२+३+\cdots\cdots+न\}$

$\left\{\frac{न(न+१)}{२}\right\}^२+\frac{न^२+२न}{२}$ उत्तर

(७) $१+५+११+१९+२९+४१+\cdots\cdots+(न^२+न-१)$

$=(१^२+०)+(२^२+१)+(३^२+२)+(४^२+३)+\cdots$
$(न^२+न-१)$

$=(१^२+२^२+३^२+\cdots+न^२)+(१+२+३+\cdots+न-१)$

$=\frac{(२न+१)न(न+१)}{६}+\frac{न^२+२न}{२}$ उत्तर।

(८) $२+१२+३६+८०+\cdots\cdots+(न^३+न^२)$

$=(१^३+१^२)+(२^३+२^२)+(३^३+३^२)+(४^३+४^२)+\cdots\cdots$
$+(न^३+न^२)$

$=(१^३+२^३+३^३+४^३+\cdots\cdots+न^३)+(१^२+२^२+३^२+\cdots+न^२)$

$=\left\{\frac{न(न+१)}{२}\right\}^२+\frac{(२न+१)न(न+१)}{६}=\frac{न(न+१)}{२}\left\{\frac{न(न+१)}{२}+\frac{(२न+१)}{३}\right\}$

$= \frac{(न+२)(न+१)(३न^{२}+५न)}{२ \cdot ६} = \frac{न(न+१)(न+२)(३न+५)}{१२}$ उत्तर

(१५) किसी समान्तर श्रेढ़ी के दो पद यदि दी हुई दो संख्याओं के बराबर हों, तो उन पदों के अन्तर से दी हुई संख्याओं के अन्तर में भाग दें, तो चय होता है। उसके बाद हम आसानी से आदि निकाल सकते हैं।

उदाहरण—जिस समान्तर श्रेढ़ी का ५ वाँ पद १९ और ८ वाँ पद ३१ है, वह श्रेढ़ी बताओ?।

यहाँ पदों का अन्तर = ८ − ५ = ३। और दी हुई संख्याओं का अन्तर = ३१ − १९ = १२।

$\therefore$ चय = १२ ÷ ३ = ४।

यदि कोई पद किसी दी हुई संख्या के बराबर हो, तो १ घटे हुए पद से चय को गुणाकर उस संख्या में घटा दें, तो आदि होता है।

$\because$ यहाँ ५ वाँ पद १९ के समान है।

$\therefore$ ५ में १ घटाया, तो ४ हुआ। इससे चय ४ को गुणा किया तो १६ हुआ। अब १६ को १९ में घटाया तो १९ − १६ = ३ = आदि।

$\therefore$ अभीष्ट श्रेढ़ी = ३,७,११,१५.........इत्यादि।

(१६) $२^{२} + ४^{२} + ६^{२} + ८^{२} + १०^{२} + \cdots\cdots$ न पर्यन्त

$= (१^{२} \times २^{२}) + (२^{२} \times २^{२}) + (३^{२} \times २^{२}) + \cdots\cdots (न^{२} \times २^{२})$

$= २^{२}(१^{२} + २^{२} + ३^{२} + \cdots\cdots + न^{२}) = ४\left\{\frac{२न+१}{३}\right\} \frac{न(न+१)}{२}$

$= \frac{२}{३}$ न (न + १)(२ न + १) उत्तर।

(१७) $२४ + ६६ + १२६ + \cdots\cdots + $ न पर्यन्त।

$३\cdot८ + ६\cdot११ + ९\cdot१४ + \cdots\cdots ३न(३न+५)$

$= ३(३ \times १ + ५) + ३ \times २(३ \times २ + ५) + ३ \times ३(३ \times ३ + ५) + \cdots$
$+ ३न(३न+५)$

$= (९ \times १ + १५) + (९ \times २^{२} + १५ \times २) + (९ \times ३^{२} + १५ \times ३) + \cdots\cdots + (९न^{२} + १५न)$

$= ९(१^{२}+२^{२}+३^{२}+\cdots\cdots न^{२}) + १५(१+२+३+\cdots\cdots+न)$

$= ९ \times \frac{(२न+१)न(न+१)}{६} + \frac{१५ \times न(न+१)}{२}$

$= \frac{३(२न+१)(न+१)न}{२} + \frac{१५न(न+१)}{२} = \frac{३न(न+१)}{२}\{२न+१+५\}$

$= \frac{३न(न+१)}{२}(२न+६) = \frac{३न(न+१)(न+३)\times २}{२} =$

$= ३न(न+१)(न+३)$ उत्तर।

(१८) $१^२+(१^२+२^२)+(१^२+२^२+३^२)+\cdots\cdots+(१^२+२^२+३^२+\cdots\cdots+न^२)$

$= १^२+(१^२+२^२)+(१^२+२^२+३^२)+\cdots+\left(\frac{(२न+१)न(न+१)}{६}\right)$

$= १^२+(१^२+२^२)+(१^२+२^२+३^२)+\cdots+\left(\frac{२न^३+३न^२+न}{६}\right)$

$= १^२+(१^२+२^२)+(१^२+२^२+३^२)+\cdots\cdots+\left(\frac{न^३}{३}+\frac{न^२}{२}+\frac{न}{६}\right)$

$= \left(\frac{१^३}{३}+\frac{१^२}{२}+\frac{१}{६}\right)+\left(\frac{२^३}{३}+\frac{२^२}{२}+\frac{२}{६}\right)+\left(\frac{३^३}{३}+\frac{३^२}{२}+\frac{३}{६}\right)+\cdots\cdots$

$\left(\frac{न^३}{३}+\frac{न^२}{२}+\frac{न}{६}\right)$

$= \frac{१}{३}(१^३+२^३+३^३+\cdots\cdots+न^३)+\frac{१}{२}(१^२+२^२+३^२+$

$\cdots\cdots+न^२)+\frac{१}{६}(१+२+३+\cdots\cdots+न)$

$= \frac{१}{३}\left(\frac{न(न+१)}{२}\right)^२+\frac{१}{२}\frac{(२न+१)न(न+१)}{६}+\frac{१}{६}\frac{न(न+१)}{२}$

$= \frac{१}{३}\left(\frac{न(न+१)}{४}\right)\{न(न+१)+(२न+१)+१\}$

$= \frac{१}{१२}न(न+१)(न^२+न+२न+१+१)$

$= \frac{१}{१२}न(न+१)(न^२+३न+२)$

$= \frac{१}{१२}न(न+१)\{न^२+२न+न+२\}$

$= \frac{१}{१२}न(न+१)\{न(न+२)+(न+२)\}$

$= \frac{१}{१२}न(न+१)(न+१)(न+२)$

$= \frac{१}{१२}न(न+१)^२(न+२)$ उत्तर।

(१९) $१+५+१२+२२+३५+\cdots\cdots\cdots$ न पद पर्यन्त, इनका योग करना है। मान लिया कि इसका योग $=$ स, और अन्तिम पद $= त_न$ है।

अब $स = १+५+१२+२२+३५+\cdots\cdots+त_न\cdots\cdots(१)$

और $स = ०+१+५+१२+२२+\cdots\cdots+त_{न-१}+त_न\ (२)$

(१) में (२) को घटाने पर

$स-स = (१-०)+(५-१)+(१२-५)+\cdots+(त_न-त_{न-१})-त_न$

वा $० = १+४+७+१०+\cdots\cdots+न$ पर्यन्त $- त_न$

$\therefore त_न = १ + ४ + ७ + १० + \cdots\cdots$ न पर्यन्त

$$= \frac{न}{२}\{ २ + ३ (न - १) \} = \frac{न}{२} (३ न - १) = \frac{३ न^२}{२} - \frac{न}{२}$$

अब यदि $न = १, २, ३ \cdots\cdots$ इत्यादि तब

$$स = \left(\frac{३ \cdot १^२}{२} - \frac{१}{२}\right) + \left(\frac{३ \cdot २^२}{२} - \frac{२}{२}\right) + \left(\frac{३ \cdot ३^२}{२} - \frac{३}{२}\right) + \cdots + \left(\frac{३ न^२}{२} - \frac{न}{२}\right)$$

$$= \frac{३}{२}(१^२ + २^२ + ३^२ + \cdots\cdots + न^२) - \frac{१}{२}(१+२+३+ \cdots +न)$$

$$= \frac{३}{२} \times \frac{न (न+१)(२ न+१)}{६} - \frac{१}{२} \cdot \frac{न (न+१)}{२}$$

$$= \frac{१}{४} न (न+१) (२न+१ - १) = \frac{१}{४} न(न+१)\, २ न = \frac{न^२(न+१)}{२}$$ उत्तर ।

(२०) यदि $स = १ + ७ + १८ + ३४ + \cdots\cdots त_न \quad \cdots\cdots(१)$

तो $स = ० + १ + ७ + १८ + ३४ + \cdots\cdots + त_{न-१} + त_न \cdots (२)$

(१) में (२) को घटाने पर ।

$$स - स = (१ - ०)+(७ - १)+(१८ - ७)+ \cdots +(त_न - त_{न-१}) - त_न$$

वा $० = १ + ६ + ११ + १६ + \cdots\cdots$ न पर्यन्त $- त_न$

$\therefore त_न = १ + ६ + ११ + १६ + \cdots\cdots$ न पर्यन्त

$$= \frac{न}{२}\{ २ + (न - १) ५ \} = \frac{न}{२} (५ न - ३) = \frac{५ न^२}{२} - \frac{३ न}{२}$$

यदि $न = १, २, ३$ इत्यादि, तो

$$स = \left(\frac{५ \cdot १^२}{२} - \frac{३ \times १}{२}\right) + \left(\frac{५ \cdot २^२}{२} - \frac{३ \times २}{२}\right) + \left(\frac{५ \cdot ३^२}{२} - \frac{३ \cdot ३}{२}\right) + \cdots + \left(\frac{५ न^२}{२} - \frac{३ न}{२} \right)$$

$$= \frac{५}{२} (१^२ + २^२ + ३^२ + \cdots न^२) - \frac{३}{२} (१ + २ + ३ + \cdots न)$$

$$= \frac{५}{२} \times \frac{न (न+१)(२ न+१)}{६} - \frac{३}{२} \cdot \frac{न (न+१)}{२}$$

$$= \frac{न (न+१)}{४} \left\{ \frac{५ (२ न+१)}{३} - ३ \right\} = \frac{न (न+१)}{४} \left\{ \frac{१० न+५-९}{३} \right\}$$

$$= \frac{न (न+१)}{४} \times \frac{१० न - ४}{३} = \frac{न (न+१) (५ न-२)}{२ \times ३}$$

$$= \frac{न (न+१) (५ न-२)}{६}$$ उत्तर ।

(२१) $\frac{१}{१ \cdot २} + \frac{१}{२ \cdot ३} + \frac{१}{३ \cdot ४} + \frac{१}{४ \cdot ५} + \cdots \frac{१}{न (न+१)}$

यहाँ १ला पद $= \frac{१}{१ \cdot २} = १ - \frac{१}{२}$ । २रा पद $= \frac{१}{२} - \frac{१}{३}$ ।

३रा पद $= \frac{१}{३} - \frac{१}{४}$ । इसी तरह अन्तिम पद $= \frac{१}{न} - \frac{१}{न+१}$

$\therefore$ योग $= (१ - \frac{१}{२}) + (\frac{१}{२} - \frac{१}{३}) + (\frac{१}{३} - \frac{१}{४}) + \cdots\cdots + (\frac{१}{न} - \frac{१}{न+१})$

$= १ - \frac{१}{न+१} = \frac{(न+१)-१}{न+१} = \frac{न}{न+१}$ उत्तर।

(२२) $\frac{१}{१\cdot४} + \frac{१}{४\cdot७} + \frac{१}{७\cdot१०} + \cdots\cdots$ न पर्यन्त

यहाँ १ला पद $= \frac{१}{३}(१ - \frac{१}{४})$। २रा पद $= \frac{१}{३}(\frac{१}{४} - \frac{१}{७})$। ३रा पद $= \frac{१}{३}(\frac{१}{७} - \frac{१}{१०})$

अतः अन्तिम पद $= \frac{१}{३}(\frac{१}{३न-२} - \frac{१}{३न+१})$

$\therefore$ योग $= \frac{१}{३}(१ - \frac{१}{४}) + \frac{१}{३}(\frac{१}{४} - \frac{१}{७}) + \cdots\cdots + \frac{१}{३}(\frac{१}{३न-२} - \frac{१}{३न+१})$

$= \frac{१}{३}(१ - \frac{१}{३न+१}) = \frac{१}{३}(\frac{३न+१-१}{३न+१}) = \frac{१}{३}(\frac{३न}{३न+१}) = \frac{न}{३न+१}$ उत्तर।

(२३) किसी समान्तर श्रेढी के तीन लगातार पदों का योग १८ है, और उनका गुणनफल १६२ तो वे पद बताओ।

मान लिया कि, वे पद क्रम से (य − र), य, और (य + र) है

तो प्रश्न के अनुसार (य − र) + य + (य + र) = १८

या ३ य = १८

$\therefore$ य = ६

अब तीनों पद क्रम से—(६ − र), ६ और (६ + र) हुये।

$\therefore$ (६ − र) ६ (६ + र) = १६२

या (६ − र) (६ + र) = २७

या $३६ - र^2 = २७$, $\therefore र^2 = ९$, $\therefore$ र = ३

$\therefore$ अभीष्ट पद = ३, ६, ९ उत्तर।

(२४) किसी समान्तर श्रेढी के ५ लगातार पदों का योग ३५ है और उनका घनयोग ३६०५ है, तो वे पद क्या हैं?

मान लिया कि वे पद क्रम से (य − २र), (य − र), य, (य+र), (य+२र)

$\therefore$ (य − २ र) + (य − र) + य + (य + र) + (य + २ र) = ३५

या ५ य = ३५, $\therefore$ य = ७।

फिर, $(य - २ र)^3 + (य - र)^3 + (य)^3 + (य+र)^3 + (य+२ र)^3 = ३६०५$

या, $य^3 + \{(य+र)^3 + (य - र)^3\} + \{(य+२ र)^3 + (य - २ र)^3\} = ३६०५$

या, $य^3 + (२ य)^3 - ३ (य^2 - र^2) \times २ य + (२ य)^3 - ३ (य^2 - ४ र^2) २य = ३६०५$

या, $य^3 + ८ य^3 - ६ य^3 + ६ यर^2 + ८ य^3 - ६ य^3 + २४ यर^2 = ३६०५$

या, $५ य^3 + ३० यर^2 = ३६०५$

या, $५ य (य^२ + ६ र^२) = ३६०५$

या, $य (य^२ + ६ र^२) = ७२१$

या, $७ (४९ + ६ र^२) = ७२१$

या, $(४९ + ६ र^२) = १०३$

या, $६ र^२ = ५४$

या $र^२ = ९$

$\therefore र = ३$

$\therefore$ वे पद क्रम से १, ४, ७, १०, १३ ..... उत्तर।

गुणोत्तर श्रेढ़ी का परिशिष्ट।

उस पद समूह को, जिसमें दो लगातार पदों की निष्पत्ति हमेशा समान हो, गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं।

उदाहरण—(१) $\frac{१}{२} + \frac{३}{२^२} + \frac{१}{२^३} + \frac{३}{२^४} + \cdots$ अनन्त पद पर्यन्त।

$= \frac{१}{२} + \frac{१}{२^३} + \frac{१}{२^५} + \cdots$ अनन्त पद पर्यन्त।

$+ \frac{३}{२^३} + \frac{३}{२^४} + \frac{३}{२^६} + \cdots$ अनन्त पद पर्यन्त।

$= \left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२^३} + \frac{१}{२^५} + \cdots \right) + ३ \left(\frac{१}{२^२} + \frac{१}{२^४} + \frac{१}{२^६} + \cdots \right)$

यहाँ गु $= \frac{१}{२}$ तथा न (पद)

$\therefore$ योग $= \dfrac{\frac{१}{२}}{१ - \frac{१}{२}} + \dfrac{३ \times \left(\frac{१}{२} \right)^२}{१ - \left(\frac{१}{२} \right)^२} = \dfrac{\frac{१}{२}}{\frac{१}{२}} + \dfrac{\frac{३}{४}}{\frac{३}{४}}$

$= \frac{१ \times २}{२ \times १} + \frac{३ \times ४}{३ \times ४} = १ + १ = २$ उत्तर।

(२) $५ + ५५ + ५५५ + \cdots$ न पर्य्यन्त।

$= ५ (१ + ११ + १११ + \cdots$ न पर्य्यन्त $)$

$= \frac{५}{९} (९ + ९९ + ९९९ + \cdots$ न पर्य्यन्त $)$

$= \frac{५}{९} [(१० - १) + (१०० - १) + (१००० - १) + \cdots$ न पर्य्यन्त $]$

$= \frac{५}{९} [१० + १०^२ + १०^३ + \cdots$ न पर्य्यन्त $- (१ + १ + १ \cdots$ न पर्य्यन्त$)]$

$= \frac{५}{९} \left[\frac{१० (१०^न - १)}{१० - १} - न \right]$

$= \frac{५०(१०^{न}-१)}{९\times९} - \frac{५न}{९} = \frac{५०}{८१}(१०^{न}-१) - \frac{५}{९}न$ उत्तर ।

(३) $९ + ९९ + ९९९ + \cdots$ न पर्यन्त

$= \frac{९}{१०} + \frac{९९}{१००} + \frac{९९९}{१०००} + \cdots$ न पर्यन्त

$= \left[\left(१ - \frac{१}{१०}\right) + \left(१ - \frac{१}{१००}\right) + \left(१ - \frac{१}{१०००}\right) + \cdots \text{न पर्यन्त}\right]$

$= \left[(१+१+१+१+ \cdots \text{न पर्यन्त}) - \left(\frac{१}{१०} + \frac{१}{१००} + \frac{१}{१०००} + \cdots \text{न पर्यन्त}\right)\right]$

$= \left\{ न - \left(\frac{१}{१०} + \frac{१}{१०^{२}} + \frac{१}{१०^{३}} + \cdots\cdots \text{न पर्यन्त}\right)\right\}$

$= न - \frac{\left[१ - \left(\frac{१}{१०}\right)^{न}\right]\frac{१}{१०}}{१ - \frac{१}{१०}} = न - \frac{\frac{१}{१०} \times \left[१ - \left(\frac{१}{१०}\right)^{न}\right]}{\frac{९}{१०}}$

$= न - \frac{१ - \frac{१}{१०^{न}}}{९} = न - \frac{१}{९}\left(१ - \frac{१}{१०^{न}}\right)$ उत्तर ।

(४) यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी में तीन लगातार पदों का योग १४ और उनका गुणन फल ६४ है, तो उन पदों को बताओ ।

मान लिया कि वे पद क्रम से य, य·र, य·र^{२}

तो प्रश्न के अनुसार—$य + य·र + य·र^{२} = १४ \cdots\cdots(१)$

और $य \times य·र \times य·र^{२} = ६४ \cdots\cdots(२)$

अब (१) समीकरण से—$य\,(१ + र + र^{२} = १४$

$\therefore य = \frac{१४}{१ + र + र^{२}} \cdots\cdots(३)$

(२) समीकरण से $य^{३}·र^{३} = ६४$

$\because य·र = ४ \cdots\cdots(४)$

वा $\frac{१४ \times र}{१ + र + र^{२}} = ४,$

वा $१४\,र = ४\,(१ + र + र^{२})$

वा $१४\,र = ४ + ४\,र + ४\,र^{२}$

वा $४\,र^{२} - १०\,र + ४ = ०$

वा $२\,र^{२} - ५\,र + २ = ०$

उदाहरण—इसका गणित मूल में स्पष्ट है अतः यहाँ नहीं दिया गया।

प्रकारान्तरेण तज्ज्ञानाय करणसूत्रं सार्धवृत्तम्।

राश्योरन्तरवर्गेण द्विघ्ने घाते युते तयोः।
वर्गयोगो भवेदेवं तयोर्योगान्तराहतिः ॥ ३ ॥
वर्गान्तरं भवेदेवं ज्ञेयं सर्वत्र धीमता।

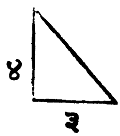
राश्योः द्विघ्ने घाते तयोः अन्तर वर्गेण युते वर्गयोगः भवेत्। तयोः योगान्तराहतिः वर्गान्तरं भवेत्। एवं धीमता सर्वत्र ज्ञेयम् ॥

दो राशियों के अन्तर वर्ग में उन्हीं दो राशियों के द्विगुणित घात जोड़ देने से उन दोनों राशियों का वर्गयोग होता है और दो राशियों के योगान्तर घात तुल्य उन राशियों का वर्गान्तर होता है। इसी प्रकार सर्वत्र बुद्धि मानों को जानना चाहिए।

उपपत्तिः—कल्प्यते वर्गयोगः = व·यो· = अ^2 + क^2 = अ^2 + क^2 $\pm$ २ अ क + २ अ क = अ^2 − २ अ क + क^2 + २ अ क = (अ − क)^2 + २ अ क अत उपपन्नं वर्गयोगानयनम्। यदि वर्गान्तरम् = व·अं = अ^2 − क^2 = अ^2 − क^2 + अ·क − अ·क = अ^2 − अ·क + क^2 − अ·क = अ (अ+क) − क(क+अ) = (अ + क) (अ − क) अत उपपन्नं सर्वम्।

कोटिश्चतुष्टयमिति पूर्वोक्तोदाहरणे।

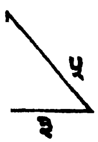
न्यासः।



कोटिः ४। भुजः ३। अनयोर्घाते १२। द्विघ्ने २४। अन्तरवर्गेण १ युते वर्गयोगः २५। अस्य मूलं कर्णः ५।

अथ कर्णभुजाभ्यां कोट्यानयनम्।

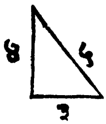
न्यासः।



कर्णः ५। भुजः ३। अनयोर्योगः ८। पुनरेतयोरन्तरेण २ हतो वा १६ वर्गान्तरमस्य मूलं कोटिः ४।

न्यासः ।

अथ भुजज्ञानम् ।



कोटिः ४ । कर्णः ५ । एवं जातो भुजः ३ ।

उदाहरण—कोटि ४ और भुज ३ है । इन दोनों के वर्गयोग जानने के लिये सूत्र के अनुसार ४, ३ का द्विघ्नघात $= ४ \times ३ \times २ = २४$ हुआ । इसे अन्तरवर्ग $(४ - ३)^२ = १^२ = १$ में जोड़ने पर $(२४ + १) = २५$ हुआ । यही ४ और ३ का वर्गयोग है ।

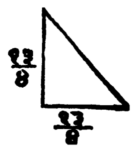
वर्गान्तर के लिये ४ और ३ का योग ७ को ४ और ३ का अन्तर १ से गुणा करने पर $(७ \times १) = ७$ हुआ । यही उन दोनों का वर्गान्तर है । शेष बातें मूल में स्पष्ट हैं ।

उदाहरणम् ।

साङ्घ्रित्रयमितो बाहुर्यत्र कोटिश्च तावती ।
तत्र कर्णप्रमाणं किं गणक ? ब्रूहि मे द्रुतम् ॥ २ ॥

हे गणक, जहाँ $३\frac{१}{४}$ भुज है और कोटि भी उतनी ही है, वहाँ कर्ण का मान बताओ ॥ २ ॥

न्यासः ।



भुजः $\frac{१३}{४}$ । कोटिः $\frac{१३}{४}$ । अनयोर्वर्गयोगः $\frac{१६९}{८}$ । अस्य मूलाभावात् करणीगत एवायं कर्णः ।

उदाहरण—$\because$ भु^{२} + को^{२} = क^२ $\therefore$ क$^२ = (३\frac{१}{४})^२ + (३\frac{१}{४})^२ =$
$(\frac{१३}{४})^२ + (\frac{१३}{४})^२ = (\frac{१६९}{१६} + \frac{१६९}{१६}) = \frac{३३८}{१६} = \frac{१६९}{८}$

$\therefore$ कर्ण $= \sqrt{\frac{१६९}{८}}$ । यहाँ $\frac{१६९}{८}$ का मूल नहीं होने से करणी गत (अवर्गाङ्क) ही कर्ण का मान होगा । अवर्गाङ्क का आसन्न मूल लाने की विधि आगे कही जा रही है ।

अस्यासन्नमूलज्ञानार्थमुपायः।

वर्गेण महतेष्टेन हताच्छेदांशयोर्वधात्।
पदं गुणपदक्षुण्णच्छिद्भक्तं निकटं भवेत्॥

छेदांशयोः वधात् महता इष्टेन वर्गेण हतात् पदं गुणपदक्षुण्णच्छिद्भक्तं तदा निकटं (आसन्नमूलं) भवेत्।

जिस अवर्गाङ्क का मूल निकालना हो, उसे अपने हर से गुणे हुये महान (कल्पित) इष्ट के वर्ग से गुणाकर उसका वर्ग मूल लेवें। बाद में उस मूल को इष्ट गुणित हर से भाग देने पर उस अवर्गाङ्क का मूल होता है।

इयं वर्गकरणी $\frac{१६९}{८}$। अस्याः छेदांशघातः १३५२। अयुतघ्नः १३५२०००० अस्यासन्नमूलम् ३६७७। इदं गुणमूल- १००) गुणितच्छेदेन (८००) भक्तं लब्धमासन्नपदम् $४\frac{४७७}{८००}$। अयं कर्णः। एवं सर्वत्र।

उदाहरण—अवर्गाङ्क $= \frac{१६९}{८}$। यहाँ इष्ट माना $= १००$। अब सूत्र के अनुसार इष्टवर्ग (१००००) को (८) हर से गुणा कर अंश (१६९) को गुणा किया तो (१६९×८००००) $=$ १३५२०००० यह हुआ। इसका मूल लिया तो ३६७७ हुआ। इस आसन्न मूल (३६७७) को इष्ट गुणित हर से भाग देने पर ($३६७७ \div ८ \times १००$) $= ४\frac{४७७}{८००}$ यही आसन्न मूल हुआ। आसन्न मूल के लाने में इष्ट जैसे-जैसे बढ़ता जायगा वैसे-वैसे आसन्न मूल उत्तरोत्तर सूक्ष्म होता जायगा। इसलिये सूत्र में महान् इष्ट कल्पना करने की विधि कही गयी है। इसकी युक्ति नीचे उपपत्ति में स्पष्ट की गयी है।

अत्रोपपत्तिः—कल्प्यतेऽवर्गाङ्कः $= \frac{\text{अ}}{\text{क}}$

$$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अ} \times \text{क} \times \text{म·इ}^2}{\text{क} \times \text{क} \times \text{म·इ}^2} = \frac{\text{अ} \times \text{क} \times \text{म·इ}^2}{\text{क}^2 \times \text{म·इ}^2}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{क}}} = \frac{\sqrt{\text{अ} \times \text{क} \times \text{म·इ}^2}}{\text{क} \times \text{म·इ}}$$, अत उपपन्नम्।

अत्र यथा-यथा महदिष्टं कल्प्यते तथा तथाऽऽसन्नमूलं वास्तवमूलासन्नं भवतीति प्रदर्श्यते—कल्प्यते $\text{अं} \times \text{छे} \times \text{इ}^2$ अस्य वास्तवमूलं $=$ य। आसन्न मूलं $=$ मू·, एवं शेषम् $=$ शे·।

$\therefore\ य^2 = मू^2 + शे\cdot = अं \times छे \times इ^2$ ।

$\therefore\ \sqrt{\frac{अं}{छे}} = \frac{\sqrt{अं \times छे \times इ^2}}{छे \times इ} = \frac{मू\cdot}{छे \times इ} = आ\cdot मू\cdot$

एवं $\sqrt{\frac{अं}{छे}} = \frac{\sqrt{अं \times छे \times इ^2 \times म\cdot इ^2}}{छे \times इ \times म\cdot इ} = \frac{य \times म\cdot इ}{छे \times इ \times म\cdot इ}$

$= \frac{\sqrt{मू^2 + शे \times म\cdot इ}}{छे\cdot \times इ \times म\cdot इ} = \frac{\sqrt{मू^2 \times म\cdot इ^2 + शे \times म\cdot इ^2}}{छे \times इ \times म\cdot इ} \parallel \frac{\sqrt{मू^2 + शे'}}{छे \times इ \times म\cdot इ}$

अत्र निरग्रमूलं $= मू' = मू \times म\cdot इ + इ'$

द्वितीयासन्नमूलम् $= \frac{मू'}{छे\cdot इ \times म\cdot इ} = \frac{मू\cdot म\cdot इ}{छे\cdot इ\cdot म\cdot इ} + \frac{इ'}{छे\cdot इ\cdot म\cdot इ}$

$= \frac{मू\cdot}{छे \times इ} + \frac{इ'}{छे\cdot इ\cdot म\cdot इ}$ । अत्र स्वरूप दर्शनेन स्पष्टं ज्ञायते यत् प्रथमासन्न-मूलादधिकं द्वितीयासन्नमूलमस्त्यत एवोक्तं भास्करेण 'वर्गेण महतेष्टेनेति ।

विशेष:—भास्करोक्त विधि से $\frac{१६९}{८}$ का आसन्नमूल $= ४\frac{४७७}{८००}$ । अब $\frac{१६९}{८}$ को दशमलव में परिवर्तित करने पर २१·१२५ हुआ। इसका दशमलव के वर्गमूल की रीति से वर्गमूल लेने पर ४·५९६ हुआ। यथा—

४	२१·१२५० (४·५९१
४	१६
८५	५१२
५	४२५
९०९	८७५०
९	८१८१
९१८६	५६९००
६	५५११६
९१९२१	१७८४००
१	९१९२१
९१९२२९	८६४७९००
९	८२७३०६१
९१९२३८४	३७४८३९००
	३६७६९५३६
	७१४३६४

यद्यपि दशमलव की रीति से वर्ग-मूल की क्रिया सरल है, फिर भी इसकी अपेक्षा भास्करोक्त रीति से लाया हुआ आसन्न मूल सूक्ष्म है।

परिशिष्ट

समकोण त्रिभुज में यदि कोई दो भुजायें मालूम हों, तो तीसरी भुजा आसानी से जानी जा सकती है। इस त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा कर्ण, और शेष दो भुजायें कोटि और भुज या लम्ब और आधार कहलाती हैं।

$\therefore$ क^2 = को^{2} + भु^{2} (या, लं^{2} + आ^2)

$\therefore$ क = $\sqrt{\text{को}^2 + \text{भु}^2}$ = $\sqrt{\text{लं}^2 + \text{आ}^2}$ ।

लं = $\sqrt{\text{क}^2 - \text{आ}^2}$

और आ = $\sqrt{\text{क}^2 - \text{लं}^2}$

उदाहरण—

(१) एक सीढ़ी किसी घर के सहारे इस तरह खड़ी है, कि वह घर की २४ फीट ऊँची खिड़की तक पहुँच गई है। यदि सीढ़ी की जड़ घर से ३२ फीट पर हो, तो सीढ़ी की लम्बाई बताओ।

यहाँ सीढ़ी की लम्बाई = कर्ण, खिड़की की ऊँचाई = लम्ब (कोटि) और घर की जड़ से सीढ़ी की जड़ की दूरी = आधार (भुज)।

$\therefore$ क = $\sqrt{\text{लं}^2 + \text{आ}^2}$ = $\sqrt{२४^2 + ३२^2}$ = $\sqrt{५७६ + १०२४}$ = $\sqrt{१६००}$ = ४० फीट,

सीढ़ी की लम्बाई = ४० फीट, उत्तर।

(२) किसी नदी के किनारे एक मीनार (टावर) खड़ा है। यदि नदी की चौड़ाई १३५ फीट, और मीनार की ऊँचाई १८० फीट हों, तो नदी के ठीक दूसरे किनारे से मीनार की चोटी की दूरी बताओ।

क = $\sqrt{\text{लं}^2 + \text{आ}^2}$ = $\sqrt{१८०^2 + १३५^2}$ = $\sqrt{३२४०० + १८२२५}$

= $\sqrt{५०६२५}$ = २२५ फीट

$\therefore$ अभीष्ट दूरी = २२५ फीट उत्तर।

(३) दो जहाज एक बन्दरगाह से एक ही समय रवाना हुये। उनमें से एक पूर्व की ओर प्रति दिन २४ माइल की गति से और दूसरा दक्षिण की ओर प्रति दिन ३२ माइल की गति से चला, तो ६ दिन के बाद दोनों जहाजों की दूरी बताओ।

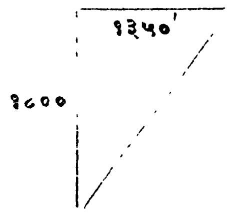
$\because$ २४ माइल की गति से ६ दिन में पूर्व की ओर जानेवाला जहाज
२४ × ६ = १४४ माइल चलेगा।

इसी तरह ३२ माइल की गति से ६ दिन में दक्षिण जाने वाला जहाज
३२ × ६ = १९२ माइल चलेगा।

$\because$ पूर्व और दक्षिण दिशा के बीच का कोण समकोण है, अतः ६ दिन के बाद दोनों जहाज की दूरी उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी भुजायें १४४, और १९२ माइल हैं।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी = $\sqrt{१४४^२ + १९२^२} = \sqrt{२०७३६ + ३६८६४} = \sqrt{५७६००}$
= २४० माइल।

(४) एक गुब्बारा (Balloon) १८०० फीट उँचाई से हवा के द्वारा १३५० फीट चला गया, तो जहाँ से वह उड़ाया गया था, वहाँ से उसकी दूरी बताओ। यहाँ उस बिन्दु से गुब्बारे की दूरी जहाँ से वह



उड़ाया गया था, उस त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी भुजायें १३५० और १८०० फीट है और इन भुजाओं के बीच का कोण सम कोण है।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी = $\sqrt{१८००^२ + १३५०^२}$ =
$\sqrt{३२४०००० + १८२२५००} = \sqrt{५०६२५००}$ =
२२५० फीट

(५) एक ८५ फीट लम्बी सीढ़ी किसी घर की चोटी तक पहुँच जाती है। यदि घर से सीढ़ी की जड़ ४० फीट हो, तो घर की उँचाई बताओ। यहाँ सीढ़ी की लम्बाई, उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी समकोण बनाने वाली भुजायें, उस घर की उँचाई और घर से सीढ़ी की जड़ की दूरी हैं। तो घर की उँचाई = $\sqrt{८५^२ - ४०^२}$ =
$\sqrt{(८५+४०)(८५-४०)} = \sqrt{१२५ \times ४५} = \sqrt{२५ \times ५ \times ५ \times ९}$ =
$\sqrt{२५^२ \times ३^२}$ = २५ × ३ = ७५ फीट।

(६) एक सीढ़ी किसी गली में एक घर की २० फीट उँचाई तक पहुँचती है। सीढ़ी की जड़ उस घर से १५ फीट दूर है। सीढ़ी की जड़ को उसी बिन्दु में रखते हुये गली की दूसरी ओर के एक घर में उस सीढ़ी को

लगाते हैं, तो वह २४ फीट ऊँचाई तक पहुँचती है, तो सीढ़ी की लम्बाई और गली की चौड़ाई बताओ।

पहली स्थिति में सीढ़ी उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी समकोण बनाने वाली भुजायें २० फीट और १५ फीट हैं।

$\therefore$ सीढ़ी की लम्बाई $= \sqrt{२०^२ + १५^२} = \sqrt{४०० + २२५}$

$= \sqrt{६२५} = २५$ फीट।

दूसरी स्थिति में सीढ़ी की लम्बाई, उस समकोण त्रिभुज का कर्ण है, जिसकी समकोण बनाने वाली भुजायें २४ फीट और दूसरे घर से सीढ़ी की जड़ की दूरी हैं। अतः दूसरे घर से सीढ़ी की जड़ की दूरी

$= \sqrt{२५^२ - २४^२} = \sqrt{६२५ - ५७६} = \sqrt{४९} = ७$ फीट।

$\therefore$ गली की चौड़ाई $= १५ + ७ = २२$ फीट।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

समकोण त्रिभुज का कर्ण बताओ, यदि समकोण बनाने वाली भुजायें निम्न लिखित हों :—

(१) ५ फीट, १२ फीट

(२) ७ फीट और २४ फीट

(३) ३० फीट और ४० फीट

(४) १ फुट ९ इञ्च और २ फीट ४ इञ्च

(५) १ फुट और १ फुट ४ इञ्च

(६) १ फुट ३ इञ्च और १ फुट ८ इञ्च

(७) २ फीट ९ इञ्च और ३ फीट ८ इञ्च

(८) १२ गज और ९ गज

(९) २ गज और २ गज २ फीट

(१०) १२ गज और १६ गज

(११) किसी गली के एक किनारे एक मकान है और गली के दूसरे किनारे से एक सीढ़ी उस घर के सहारे इस तरह खड़ी है, कि वह उस मकान की ५४ फीट ऊँचाई तक पहुँचती है। यदि गली की चौड़ाई ७२ फीट हो, तो सीढ़ी की लम्बाई बताओ।

(१२) एक जहाज किसी बन्दरगाह से ६ माइल प्रति घण्टा की गति से ११ घण्टे तक उत्तर की ओर चलकर, वहाँ से पूर्व की ओर प्रति घण्टा ४ माइल की गति से रवाना हुआ। इस गति से २२ घण्टा चलने के बाद वह जहाज दूसरे बन्दरगाह पर पहुँचा, तो दोनों बन्दरगाह की दूरी बताओ।

(१३) दो जहाज एक ही जगह से ३५ और १२ माइल की दूरी पर क्रमसे ईशान और आग्नेय कोण में देखे गये, तो उन जहाजों के बीच की दूरी बताओ।

(१४) दो स्तम्भ, जिनकी उँचाई क्रमसे ९ और १६ फीट हैं, जमीन पर सीधे खड़े हैं। यदि उनके बीच की दूरी १२ फीट हैं, तो एक की जड़ से दूसरे की चोटी की दूरी अलग-अलग बताओ।

(१५) एक गुब्बारा ठीक ऊपर की ओर २९७० फीट जाने के बाद आँधी के झोंक से उसकी लम्बरूप दिशा में ३९६० फीट तक गया, तो जहाँ से वह उड़ा था वहाँ से उसकी दूरी बताओ।

(१६) एक गुब्बारा प्रति घण्टा १२ माइल की गति से ६ घण्टे तक ठीक ऊपर की ओर जाने के बाद एक तूफान के कारण उसकी लम्बरूप दिशा में चलने लगा। यदि तूफान के कारण उसकी गति प्रति घण्टा २४ माइल हो गया, तो चार घण्टे के बाद गुब्बारे की दूरी उस जगह से बताओ जहाँ से वह पहले उड़ा था।

(१७) किसी नदी के एक किनारे १०० फीट उँचा एक मीनार है। यदि नदी की चौड़ाई ७५ फीट है. तो नदी के सामने के दूसरे किनारे से मीनार की चोटी की दूरी बताओ।

(१८) एक मनुष्य किसी मीनार (टावरं) की जड़ से १४४ फीट चलकर मीनार की चोटी की ओर देखता है। यदि मनुष्य की उँचाई ५ फीट और मीनार की उँचाई १९७ फीट हो, तो उस मनुष्य के शिर से मीनार की चोटी की दूरी बताओ।

समकोण त्रिभुज के कर्ण और समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक निम्न लिखित हैं, तो दूसरी भुजा बताओ:—

(१९) १२० फीट और ७२ फीट. (२०) ८५ फीट और ५१ फीट

(२१) ८ गज १ फीट और ६ गज २ फीट (२२) २ फीट १ इञ्च और ७ इञ्च

(२३) किसी झण्डे की बाँस की चोटी से ४५ फीट लम्बी एक रस्सी लटकी है। यदि इसको खींचा जाता है, तो झण्डा की जड़ से २७ फीट दूर जमीन पर वह पहुँचती है, तो झण्डे की उँचाई बताओ।

(२४) एक मीनार की उँचाई ८० फीट है। उसकी चोटी में १०० फीट उँची एक सीढ़ी लगी है, तो मीनार की जड़ से सीढ़ी की जड़ की दूरी बताओ।

(२५) किसी गली के एक किनारे एक मकान है। गली के ठीक दूसरे किनारे से एक १४५ फीट लम्बी सीढ़ी उस मकान की छत तक पहुँचती है। यदि गली की चौड़ाई ८७ फीट हो, तो छत की उँचाई बताओ।

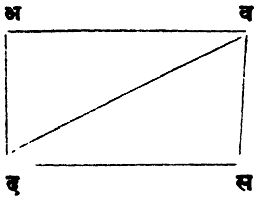
समद्विबाहुसमकोण त्रिभुज का कर्ण।

समद्विबाहुसमकोण त्रिभुज में बराबर भुजाओं के बीच का कोण समकोण होता है, अतः उस त्रिभुज का कर्ण $= \sqrt{\text{लं}^{२} + \text{आ}^{२}} = \sqrt{\text{भु}^{२} + \text{भु}^{२}}$
$= \sqrt{\text{२ भु}^{२}} = \text{भु}\sqrt{\text{२}}$

$\therefore$ समद्विबाहु त्रिभुज का क $= \sqrt{\text{२}}\,\text{भु},$ ·········(१)

और $\text{भु} = \dfrac{\text{क}}{\sqrt{\text{२}}}$ ······························ (२)

आयत का कर्ण।



मान लिया कि अ ब स द एक आयत है, जिसका कर्ण द ब, लम्बाई अ ब और चौड़ाई, अ द हैं। $\triangle$ अ ब द में $\angle$ द अ ब $=$ ९०°, अतः दब $=$
$= \sqrt{\text{अब}^{२} + \text{अद}^{२}}$ या आयत का कर्ण
$= \sqrt{\text{लम्बाई}^{२} + \text{चौड़ाई}^{२}}$ ·············(३)

चूँकि वर्ग भी एक आयत है जिसकी लम्बाई और चौड़ाई बराबर है, अर्थात् उसकी चारों भुजायें बराबर होती हैं अतः वर्ग का कर्ण
$= \sqrt{\text{लम्बाई}^{२} + \text{चौड़ाई}^{२}} = \sqrt{\text{२ लम्बाई}^{२}} = \sqrt{\text{२ चौड़ाई}^{२}} = \sqrt{\text{२ भु}^{२}}$
$= \text{भु}\sqrt{\text{२}}$। यदि वर्ग की भुजा $=$ भु और कर्ण $=$ क हो तो
$\text{क} = \text{भु}\sqrt{\text{२}}$ ················(४)

उदाहरण—

(१) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजायें १५ फीट हैं तो उसका कर्ण बताओ।

(२) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण २६ फीट है, तो उसकी बराबर भुजाओं की लम्बाई बताओ।

∵ समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की भुजा = $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}}$ ∴ अतः $\frac{26}{\sqrt{2}}$ फीट

= १३$\sqrt{2}$ फीट।

(३) एक आयत की संगति भुजायें क्रम से १६ फीट और १२ फीट हैं, तो उसका कर्ण बताओ।

आयत का कर्ण = $\sqrt{\text{लम्बाई}^2 + \text{चौड़ाई}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2}$ फीट

= $\sqrt{256 + 144} = \sqrt{400}$ = २० फीट।

(४) किसी वर्ग की भुजा १२ फीट है, तो उसका कर्ण बताओ।

वर्ग का कर्ण = $\sqrt{2}$ भु = $\sqrt{2} \times 12$ फीट।

(५) एक वर्ग का कर्ण १६ फीट है, तो उसकी भुजा बताओ।

वर्ग की भुजा = $\frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{2}}$। यहाँ कर्ण = १६ फीट।

∴ भु = $\frac{16}{\sqrt{2}}$ फीट = ८$\sqrt{2}$ फीट।

(६) एक आयत की लम्बाई १२ फीट और उसका कर्ण १५ फीट हैं। तो उसकी चौड़ाई बताओ।

आयत की चौड़ाई = $\sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{लम्बाई}^2} = \sqrt{15^2 - 12^2}$ फीट,

= $\sqrt{225 - 144} = \sqrt{81}$ = ९ फीट।

(७) एक आदमी किसी वर्गाकार मैदान के चारों तरफ २ घण्टे में घूमता है, तो उसे एक कोण से सामने के दूसरे कोण तक पहुँचने में कितना समय लगेगा।

∵ वर्ग के चारो भुजाओं को पार करने में २ घण्टा लगता है

∴ " " १ भुजा को " " $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ घण्टा लगेगा

∴ " " कर्ण को " " $\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ घंटा लगेगा।

(८) एक आदमी किसी वर्गाकार मैदान को कर्ण की राह से ५ मिनट में पार करता है। यदि उसकी गति प्रति घण्टा ४ माइल हो, तो उस मैदान का भुजयोग बताओ।

$\because$ वह आदमी १ घण्टा में ४ माइल चलता है

$\therefore$ " " ५ मिनट में $\frac{४\times५}{६०}$ माइल चलेगा

$= \frac{१}{३}$ माइल

$\therefore$ वर्ग का कर्ण $= \frac{१}{५}$ माइल $= \frac{१७६०}{५}$ गज $=$ ३५२ गज ।

$\therefore$ वर्ग की एक भुजा $= \frac{\text{कर्ण}}{\sqrt{२}} = \frac{३५२}{\sqrt{२}}$ गज

$\therefore$ वर्ग का भुज योग $= \frac{४\times३५२}{\sqrt{२}}$ गज $= ५०४\sqrt{२}$ गज ।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) किसी समकोण समद्विबाहु त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं में से प्रत्येक ७ इञ्च है, तो उसका कर्ण बताओ ।

(२) एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का कर्ण ३४ फीट है, तो उसकी बराबर भुजायें बताओ ।

(३) किसी समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का भुजयोग $१ + \sqrt{२}$ फीट है, तो उसका कर्ण बताओ ।

(४) किसी आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमसे १५ फीट और ८ फीट है, तो उसका कर्ण बताओ ।

(५) किसी आयत की एक भुजा ७२ गज और उसका कर्ण १२० गज हैं, तो उसकी दूसरी भुजा बताओ ।

(६) एक वर्ग की भुजा $\frac{१}{२}$ माइल है, तो उसके कर्ण का मान ५ दशमलव अङ्कों तक निकालो ।

(७) किसी वर्ग के एक कोने से उसके सामने के कोने तक जाने में १५ मिनट लगता है, तो उसके चारो तरफ घूमने में कितना समय लगेगा ।

(८) किसी वर्गाकार मैदान को चारो तरफ घेरने में १० रु० २० नये पैसे लगते हैं, तो उसको एक कोण से सामने के कोण तक घेरने में क्या खर्च लगेगा ?

त्र्यस्रजात्ये करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

इष्टो भुजोऽस्माद्द्विगुणेष्टनिघ्नादिष्टस्य कृत्यैकवियुक्तयाऽऽप्तम् ।
कोटिः पृथक् सेष्टगुणा भुजोना कर्णो भवेत् त्र्यस्रमिदं तु जात्यम् ॥४॥

इष्टो भुजस्तत्कृतिरिष्टभक्ता द्विःस्थापितेष्टोनयुताऽर्धिता वा ।
तौ कोटिकर्णाविति कोटितो वा बाहुश्रुती चाकरणीगते स्तः ॥५॥

इष्टः भुजः कल्प्यः । अस्मात् द्विगुणेष्टनिघ्नात् इष्टस्य कृत्या एक वियुक्तया आप्तं कोटिः भवेत् । सा कोटिः पृथक् इष्ट गुणा, भुजोना कर्णः भवेत् । इदं जात्यं त्र्यस्रं ज्ञेयम् । वा—इष्टः भुजः कल्प्यः, तत्कृतिः इष्टभक्ता द्विःस्थापिता इष्टोनयुता अर्धिता कार्या, तदा तौ क्रमेण कोटिकर्णौ स्याताम् । वा—कोटितः अकरणीगते बाहुश्रुतीस्तः ।

इस सूत्र में भुज के ज्ञान से कोटि और कर्ण का मान जानने की रीति बतलायी गई है । इष्ट भुज को कल्पित द्विगुणित इष्ट से गुणा कर उसमें रूपोन इष्ट वर्ग से भाग देने पर लब्धि कोटि होती है और उस कोटि को इष्ट से गुणा कर गुणन फल में भुज को घटाने से कर्ण होता है । इसे जात्यत्रिभुज समझना चाहिये ।

अथवा—इष्ट भुज के वर्ग में कल्पित इष्ट से भाग देकर लब्धि को दो जगह रख कर एक में इष्ट घटा कर और दूसरे में इष्ट जोड़ कर आधा करने पर क्रम से कोटि और कर्ण होते हैं ।

वा—कोटि के ज्ञान से उक्त क्रिया द्वारा अकरणीगत भुज और कर्ण होते हैं।

अत्रोपपत्तिः—अत्र 'कोटिः पृथक् स्वेष्टगुणा भुजोनाकर्णः' भवेदित्यालापोक्त्या कर्णः $=$ को $\times$ इ $-$ भु

$$\therefore \text{क}^2 = \text{को}^2 \times \text{इ}^2 - 2\,\text{को}\cdot\text{इ}\cdot\text{भु} + \text{भु}^2 = \text{भु}^2 + \underline{\text{को}}^2$$

$$\therefore \text{को}^2 \times \text{इ}^2 - \text{को}^2 = \underline{\text{भु}}^2 + 2\,\text{को}\cdot\text{इ}\cdot\text{भु} - \underline{\text{भु}}^2$$

$$\therefore \text{को}^2\,(\,\text{इ}^2 - 1\,) = 2\,\text{को}\cdot\text{इ}\cdot\text{भु}$$

$$\therefore \text{को}\,(\,\text{इ}^2 - 1\,) = 2\,\text{इ}\cdot\text{भु}$$

$$\therefore \text{को} = \frac{2\,\text{इ}\cdot\text{भु}}{(\text{इ}^2 - 1)}$$ । अथ $\text{भु}^2 = \text{क}^2 - \text{को}^2$

$= (\,\text{क} + \text{को}\,)\,(\,\text{क} - \text{को}\,)$ । अत्र यदि $\text{क} - \text{को} = \text{इ}$ तदा

$$\text{भु}^2 = (\,\text{क} + \text{को}\,) \times \text{इ}$$

$$\therefore \frac{\text{भु}^2}{\text{इ}} = \text{क} + \text{को} = \text{योग}$$ । ततः संक्रमणेन—

को $= \dfrac{\dfrac{\text{भु}^2}{\text{इ}} - \text{इ}}{2}$, तथा क $= \dfrac{\dfrac{\text{भु}^2}{\text{इ}} + \text{इ}}{2}$, अत उपपन्नं सर्वम् ।

अथवा—भुजः = भु, कोटिः = को, कर्णः = क, तथा $\text{क}^2 = \text{को}^2 + \text{भु}^2$

$\therefore \dfrac{\text{क}^2}{\text{भु}^2} = \dfrac{\text{को}^2}{\text{भु}^2} + 1$ । अत्र प्रथम पक्षस्य मूलम् $= \dfrac{\text{क}}{\text{भु}}$, द्वितीय पक्षे $\dfrac{\text{को}^2}{\text{भु}^2} + 1$ अस्मिन् 'सरूपके वर्णकृती तु यत्रेत्यादिना रूपप्रकृतौ रूपक्षेपे च कनिष्ठज्येष्ठे साधनीये तत्रेष्टवर्गं प्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेदित्यादिना रूपक्षेपे कनिष्ठम् $\dfrac{2\,\text{इ}}{\text{इ}^2 - 1}$, अस्माज्ज्येष्ठम्—

$$= \sqrt{\left(\frac{2\,\text{इ}}{\text{इ}^2 - 1}\right)^2 \times 1 + 1} = \sqrt{\frac{4\,\text{इ}^2}{(\text{इ}^2 - 1)^2} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{4\,\text{इ}^2 + (\text{इ}^2 - 1)^2}{(\text{इ}^2 - 1)^2}} = \frac{\sqrt{4\,\text{इ}^2 + \text{इ}^4 - 2\,\text{इ}^2 + 1}}{\text{इ}^2 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{इ}^4 + 2\,\text{इ}^2 + 1}}{\text{इ}^2 - 1} = \frac{\text{इ}^2 + 1}{\text{इ}^2 - 1} \text{।}$$

अत्र ह्रस्वं प्रकृतिवर्णस्य $\dfrac{\text{को}}{\text{भु}}$ अस्य मानमतः $\dfrac{\text{को}}{\text{भु}} = \dfrac{2\,\text{इ}}{\text{इ}^2 - 1}$

$\therefore$ को $= \dfrac{2\text{इ} \times \text{भु}}{\text{इ}^2 - 1}$, तथा ज्येष्ठं $\dfrac{\text{क}}{\text{भु}}$ अस्यमानमतः—

$$\frac{\text{क}}{\text{भु}} = \frac{\text{इ}^2 + 1}{\text{इ}^2 - 1} = \frac{\text{इ}^2 + 1}{\text{इ}^2 - 1} + 1 - 1 = \frac{\text{इ}^2 + 1 + \text{इ}^2 - 1}{\text{इ}^2 - 1} - 1 = \frac{2\,\text{इ}^2}{\text{इ}^2 - 1} - 1$$

$\therefore$ क $= \dfrac{2\,\text{इ}^2 \times \text{भु}}{\text{इ}^2 - 1} -$ भु अत उपपन्नं प्रथम सूत्रम् ।

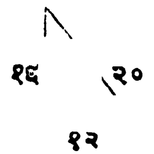
द्वितीय सूत्रस्योपपत्तिस्तु प्रागेवाभिनिहितम् ।

उदाहरणम् ।

भुजे द्वादशके यौ यौ कोटिकर्णावनेकधा ।
प्रकाराभ्यां वद क्षिप्रं तौ तावकरणीगतौ ॥ १ ॥

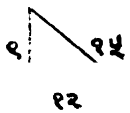
यदि इष्ट भुज १२ है, तो कोटि और कर्ण के अकरणीगत विविधमान उक्त दोनों रीति से बताओ।

न्यासः।



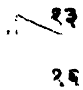
इष्टो भुजः १२। इष्टम् २। अनेन द्विगुणेन ४ गुणितो भुजः ४८। इष्ट २ कृत्या ४ एकोनया ३ भक्तो लब्धा कोटिः १६। इयमिष्टगुणा ३२ भुजोना १२ जातः कर्णः २०।

त्रिकेणेष्टेन वा



कोटिः ९। कर्णः १५

पञ्चकेन वा

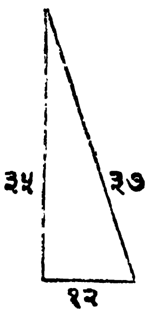


कोटिः ५। कर्णः १३।

इत्यादि।

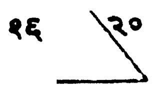
अथ द्वितीयप्रकारेण।

न्यासः



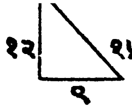
इष्टो भुजः १२। अस्यकृतिः १४४। इष्टेन २ भक्ता लब्धम् ७२। इष्टेन २ ऊन—७० युता—७४ वर्धितौ जातौ कोटिकर्णौ ३५।३७।

चतुष्टयेन वा



कोटिः १६। कर्णः २०।

षट्केन वा



कोटि: ९ । कर्ण: १५ ।

उदाहरण—इष्ट भुज १२ है। यहाँ इष्ट २ कल्पना किया। अब द्विगुणित इष्ट (२ × २) = ४ से भुज १२ को गुणा किया तो (१२ × ४) = ४८ हुआ। इसे १ घटाया हुआ इष्ट २ के वर्ग (४ − १) = ३ से भाग दिया तो (४८ ÷ ३) = १६ कोटि हुई। कोटि १६ को इष्ट २ से गुणा कर भुज घटाने से (१६ × २ − १२) = २० कर्ण हुआ।

दूसरे प्रकार से—इष्ट भुज १२ का वर्ग १४४ को इष्ट २ से भाग दिया तो ७२ हुआ। इसमें इष्ट २ घटा कर आधा करने से ३५ कोटि हुई और इष्ट जोड़ कर आधा करने से ३७ कर्ण हुआ। इसी प्रकार अनेक इष्टवश अनेक प्रकार के कोटि और कर्ण के मान होंगे। इति।

अथेष्टकर्णात् कोटिभुजानयने करणसूत्रं वृत्तम्।

इष्टेन निघ्नाद्द्विगुणाच्च कर्णादिष्टस्य कृत्यैकयुजा यदाप्तम्।
कोटिर्भवेत् सा पृथगिष्टनिघ्नी तत्कर्णयोरन्तरमत्र बाहुः ॥ ६ ॥

इष्टगुणितद्विगुणितकर्णे रूपयुक्तेष्टवर्गेण भक्ते सति कोटिर्भवति। एवं इष्टगुणितकोट्योरन्तरं भुजः स्यादिति।

कल्पित इष्ट से गुणित द्विगुणित कर्ण को रूप (१) युक्त इष्ट के वर्ग से भाग देने पर लब्धि कोटि होती है। कर्ण और इष्ट गुणित कोटि का अन्तर करने पर भुज होता है।

अत्रोपपत्तिः—कल्प्यते इष्टम् $= इ = \dfrac{क + भु}{को}$

$\therefore इ \times को = क + भु \qquad \therefore इ \times को - क = भु$, ऐतेनोत्तरार्द्धमुपपन्नम्।

$भुज = इ \times को - क$ ।

$\therefore\ भु^2 = इ^2 \times को^2 + क^2 - २\ इ \times को \times क$

$\therefore\ २\ इ \times को \times क = इ^2 \times को^2 + \underline{क^2 - भु^2} = इ^2 \times को^2 + को^2$

$\therefore\ २\ इ \times को \times क = इ^2 \times को^2 + को^2 = को^2\ (इ^2 + १)$

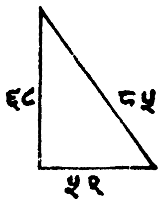
$\therefore$ २ इ $\times$ क = को ($इ^{2}+१$) $\therefore$ को = $\frac{२ इ \times क}{इ^{2}+१}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

पञ्चाशीतिमिते कर्णे यौ यात्रकरणीगतौ ।
स्यातां कोटिभुजौ तौ तौ वद कोविद सत्वरम् ॥ १ ॥

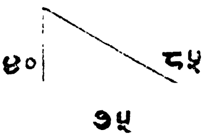
हे कोविद ! जहाँ कर्ण ८५ है वहाँ अकरणीगत अनेक प्रकार के कोटि और भुज के मान बताओ ।

न्यासः



कर्णः ८५ । अयं द्विगुणः १७० । द्विकेनेष्टेन हतः ३४० । इष्ट २ कृत्या ४ । सैकया ५ भक्तो जाता कोटिः ६८ । इयमिष्टगुणा १३६ कर्णो- ८५ निता जातो भुजः ५१ ।

चतुष्केणेष्टेन वा



कोटिः ४० । भुजः ७४ ।

उदाहरण—कर्ण = ८५ । यहाँ इष्ट = २ कल्पना किया । अब द्विगुणित कर्ण (८५ × २) = १७० को इष्ट २ से गुणा कर १ युक्त इष्ट के वर्ग से भाग देने पर (१७० × २ ÷ ५) = ६८ कोटि हुई । अब इष्ट गुणित कोटि और कर्ण का अन्तर करने से (६८ × २ − ८५) = ५१ भुज हुआ । इसी तरह ४ इष्ट से कोटि ४० और भुज ७५ होते हैं ।

पुनः प्रकारान्तरेण तत्करणसूत्रं वृत्तम् ।

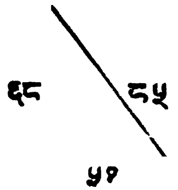
इष्टवर्गेण सैकेन द्विघ्नः कर्णोऽथवा हृतः ।
फलोनः श्रवणः कोटिः फलमिष्टगुणं भुजः ॥ ७ ॥

अथवा—द्विघ्नः कर्णः सैकेन इष्टवर्गेण हृतः फलोनः श्रवणः कार्यस्तदा कोटिः स्यात् । फलमिष्टगुणं भुजः स्यादिति ।

द्विगुणित कर्ण को एक युक्त इष्ट के वर्ग से भाग देकर लब्धि को कर्ण में घटाने से कोटि होती है और लब्धि (फल) को इष्ट से गुणा करने पर भुज होता है ।

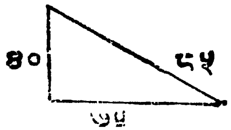
पूर्वोदाहरणे—

न्यासः ।



कर्णः ८५ । अत्र द्विकेनेष्टेन जातौ किल कोटिभुजौ ५१ । ६८ ।

चतुष्केण वा ।



कोटिः ७५ । भुजः ४० । अत्र दोःकोट्योर्नाम भेद एव केवलं न स्वरूपभेदः ।

उपपत्तिः—अत्रालापानुसारेण कल्प्यते कोटिः—

$= \text{कर्ण} - \text{फल}$ । $\text{भुज} = \text{इष्ट} \times \text{फल}$ ।

$\therefore \text{क}^2 = \text{को}^2 + \text{भु}^2 = \text{क}^2 + \text{फ}^2 - 2\,\text{क}\cdot\text{फ}\cdot + \text{इ}^2\cdot\text{फ}^2$

$\therefore \underline{\text{क}^2} = \underline{\text{क}^2} + \text{फ}^2 - \underline{2\,\text{क}\cdot\text{फ}} + \text{इ}^2\cdot\text{फ}^2$

$\therefore \text{इ}^2\cdot\text{फ}^2 + \text{फ}^2 = 2\,\text{क}\cdot\text{फ}\cdot$

$\therefore \text{फ}^2 (\text{इ}^2 + 1) = 2\,\text{क}\cdot\text{फ}\cdot$

$\therefore \text{फ} (\text{इ}^2 + 1) = 2\,\text{क}$

$\text{फ} = \dfrac{2\,\text{क}}{\text{इ}^2 + 1}$ अत उपपन्नं सर्वम्

उदाहरण—कर्ण=८५ । कल्पित इष्ट = २

यहाँ द्विगुणित कर्ण (८५ × २) = १७० को एक युक्त इष्ट के वर्ग (४ + १) = ५ से भाग देने पर लब्धि ३४ हुआ । अब ३४ को कर्ण ८५ में घटाने पर (८५ − ३४) = ५१ कोटि हुई । इष्ट २ से ३४ फल को गुणा करने से ६८ भुज हुआ । यदि ४ इष्ट हो तो कोटि ७५ और भुज ४० होंगे ।

अथेष्टाभ्यां भुजकोटिकर्णानयने करणसूत्रं वृत्तम् ।

इष्टयोराहतिर्द्विघ्नी कोटिर्वर्गान्तरं भुजः ।
कृतियोगस्तयोरेवं कर्णश्चाकरणीगतः ॥ ८ ॥

इष्टयोराहतिर्द्विघ्नी कोटिः स्यात् । तयोः वर्गान्तरं भुजः स्यात् । एवं तयोः इष्टयोः कृतियोगः अकरणीगतः कर्णः स्यादिति ।

अपनी इच्छानुसार दो इष्ट कल्पना कर उन दोनों के गुणन फल को द्विगुणित करने से कोटि होती है और उन दोनों इष्टाङ्कों का वर्गान्तर भुज होता है । उन दोनों इष्टों का वर्गयोग अकरणीगत कर्ण होता है ।

अत्रोपपत्तिः—अत्र कल्पितौ राशी, $\text{इ}^{२}$ । $\text{इ}^{२}$ ततः 'चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्य चान्तरं राश्यन्तरकृतेस्तुल्य मित्यादिना—

$$(\text{इ}^{२} + \text{इ}^{२})^{२} - \text{४}\,\text{इ}^{२} \times \text{इ}^{२} = (\text{इ}^{२} - \text{इ}^{२})^{२}$$

$$\therefore (\text{इ}^{२} + \text{इ}^{२})^{२} = \text{४}\,\text{इ}^{२} \times \text{इ}^{२} + (\text{इ}^{२} - \text{इ}^{२})^{२}$$

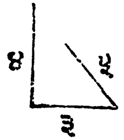
$$\therefore \text{इ}^{२} + \text{इ}^{२} = \text{२}\,\text{इ} \times \text{इ} + (\text{इ}^{२} - \;^{२})$$

यद्यत्र $(\text{इ}^{२} - \text{इ}^{२})$ = भुजं प्रकल्प्यते एवं $\text{इ}^{२} + \text{इ}^{२}$ = कर्णः स्यात्तदा तु $\text{२}\,\text{इ} \times \text{इ}$ = कोटिः भवेत्तेनोपपन्नं सर्वम् ।

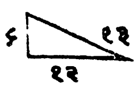
उदाहरणम् ।

यैर्यैस्त्र्यस्रं भवेज्जात्यं कोटिदोःश्रवणैः सखे ।
त्रीनप्यविदितानेतान् क्षिप्रं ब्रूहि विचक्षण ॥ १ ॥

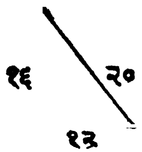
हे मित्र ! जिन २ कोटि भुज और कर्ण से जात्यत्रिभुज हो, उन सभी अज्ञात भुज कोटि और कर्ण को शीघ्र बताओ ।

न्यासः । 

अत्रेष्टे २ । १ । आभ्यां कोटिभुजकर्णाः ४ । ३ । ५ ।



अथवेष्टे २ । ३ । आभ्यां कोटि भुजकर्णाः १२ । ५ । १३



अथवेष्टे २। ४। आभ्यां कोटिभुजकर्णाः १६।१२। २०। एवमत्रानेकधा।

उदाहरण—यहाँ इष्ट २ और १ कल्पना किया। अब सूत्र के अनुसार इष्टद्वय घात को द्विगुणित करने से (२ × १ × २) = ४ कोटि हुई। इष्टद्वय का वर्गान्तर (४ − १) = ३ भुज हुआ। इष्टों का वर्ग योग (४ + १) = ५ कर्ण हुआ। इसी प्रकार भिन्न इष्टों पर से कोटि, भुज और कर्ण का मान लाना चाहिये।

कर्णकोटियुतौ भुजे च ज्ञाते पृथक्करणसूत्रं वृत्तम्।

वंशाग्रमूलान्तरभूमिवर्गो वंशोद्धृतस्तेन पृथग्युतोनौ।
वंशौ तदर्धे भवतः क्रमेण वंशस्य खण्डे श्रुतिकोटिरूपे ॥ ९ ॥

वंशाग्रमूलान्तर भूमिवर्गः वंशोद्धृतः, तेन वंशौ पृथक् युतोनौ कार्यौ। तदर्धे क्रमेण वंशस्य खण्डे श्रुति कोटि रूपे भवतः।

जहाँ कर्ण कोटि के योग और भुज ज्ञात हो वहाँ इसी सूत्र से कर्ण और कोटि का मान निकालना चाहिये। सूत्र में वंश का अर्थ कर्ण कोटि का योग है एवं वंशाग्रमूलान्तर भूमि भुज है।

क्रिया—वंश के अग्र और मूल के बीच की भुज रूप भूमि के वर्ग को वंश (क + को) से भाग देकर लब्धि को वंश में एक जगह जोड़ कर दूसरी जगह घटाकर आधा करने से क्रम से कर्ण और कोटि स्वरूप वंश के दोनों टुकड़े हो जायगें। भावार्थ यह है कि भुज वर्ग को कर्ण कोटि के योग से भाग देकर लब्धि को कर्ण कोटि के योग में धन और ऋण कर आधा करने से क्रम से कर्ण और कोटि के मान होते हैं।

उपपत्तिः—वंश = वं = क+को। वंशाग्रमूलान्तरभूमिः = अं· भु· = भुजः।

$\because$ भु^{2} = क^2 − को^{2} = (क + को) (क − को) = वं × (क − को)।

$\therefore$ अं· भु^{2} = भु^{2} = वं (क − को)

$\therefore$ क − को = $\frac{\text{भु}^2}{\text{वं}} = \frac{\text{अं· भु}^2}{\text{वं}}$ ततः संक्रमणेन—

$$\text{कर्णः} = \frac{\text{वं} + \frac{\text{अं}\cdot\text{भु}^{2}}{\text{वं}}}{2}\ ।$$

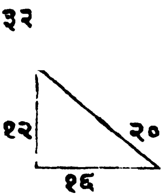
$$\text{कोटिः} = \frac{\text{वं} - \frac{\text{अं}\cdot\text{भु}^{2}}{\text{वं}}}{2}$$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

यदि समभुवि वेणुर्द्वित्रिपाणिप्रमाणो गणक पवनवेगादेकदेशे स भग्नः ।
भुवि नृपमितहस्तेष्वङ्ग लग्नं तदग्रं कथय कतिषु मूलादेष भग्नः करेषु ॥१॥

हे गणक ! किसी समतल जमीन पर ३२ हाथ ऊँचा एक बाँस खड़ा था । हवा के वेग से टूट कर उसका अग्रभाग जड़ से १६ हाथ पर समतल भूमि में लगा, तो बाँस कितनी ऊँचाई पर से टूटा यह बताओ ।

न्यासः



वंशाग्रमूलान्तरभूमिः १६ । वंशः ३२। कोटिकर्णयुतिः ३२। भुजः १६। जाते ऊर्ध्वाधःखण्डे २० । १२ ।

उदाहरण—यहाँ वंश=क + को=३२ । वंशाग्रमूलान्तरभूमि = भुज=१६ । अब सूत्र के अनुसार $\frac{\text{भु}^{2}}{\text{क}+\text{को}}$ = २५६ ÷ ३२ = ८ । अब वंश में धन ऋण करने पर ३२ + ८ = ४० । ३२ − ८ = २४ । आधा करने से कर्ण = ४० ÷ २ = २० कोटि = २४ ÷ २ = १२ । इसी तरह अन्यान्य प्रश्नों का उत्तर निकालना चाहिये ।

बाहुकर्णयोगे दृष्टे कोट्यां च ज्ञातायां पृथक्करणसूत्रं वृत्तम् ।

स्तम्भस्य वर्गोऽहिविलान्तरेण भक्तः फलं व्यालबिलान्तरालात् ।
शोध्यं तदर्धप्रमितैः करैः स्याद्बिलाग्रतो व्यालकलापियोगः ॥१०॥

स्तम्भस्य वर्गः अहिविलान्तरेण भक्तः फलं व्यालबिलान्तरालात् शोध्यं तदर्धप्रमितैः करैः विलाग्रतः व्यालकलापि योगः स्यादिति ।

इस सूत्र में भुजकर्ण का योग और कोटि ज्ञान रहने से भुज और कर्ण का मान जानने की रीति कही गयी है।

क्रिया—स्तम्भ (कोटि) के वर्ग में सर्प और बिल की दूरी (भुज और कर्ण के योग) से भाग देकर लब्धि को सर्प और बिल की दूरी (भुज और कर्ण के योग) में घटाकर आधा करने से बिल से सर्प और मयूर के योगस्थान पर्यन्त अर्थात् भुज का मान होता है। भुज मान को भुज कर्ण के योग में घटाने से कर्ण का मान होगा।

उपपत्तिः—स्तम्भ = कोटिः । अहिविलान्तरम् = भु + क तदा

$$\text{को}^2 = \text{क}^2 - \text{भु}^2 = (\text{क} + \text{भु})(\text{क} - \text{भु}) = \text{अहिवि०} \times (\text{क} - \text{भु})$$

$$\therefore \text{क} - \text{भु} = \frac{\text{को}^2}{\text{अ·वि·अ·}} = \frac{\text{स्तं·}^2}{\text{अ·वि·अ·}}$$ । अतः संक्रमणेन—

$$\text{भुज} = \frac{(\text{भु}+\text{क}) - (\text{क} - \text{भु})}{२} = \frac{१}{२}\left(\text{अ· वि· अं·} - \frac{\text{स्तं·}^2}{\text{अ·वि·अं·}}\right)$$

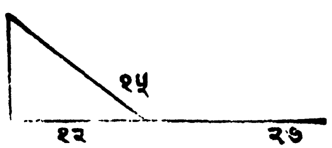
अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

अस्ति स्तम्भतले बिलं तदुपरि क्रीडाशिखण्डी स्थितः
स्तम्भे हस्तनवोच्छ्रिते त्रिगुणितस्तम्भप्रमाणान्तरे ।
दृष्ट्वाऽहिं बिलमाव्रजन्तमपतत् तिर्यक् स तस्योपरि
क्षिप्रं ब्रूहि तयोर्बिलात् कतिकरैः साम्येन गत्योर्युतिः ॥ १ ॥

समान भूमि में ९ हाथ का १ स्तम्भ खड़ा था। स्तम्भ (खम्भा) की जड़ में एक बिल था और स्तम्भ के ऊपर १ मयूर बैठा था। संयोग वश बिल से २७ हाथ की दूरी से १ सर्प को बिल की तरफ आते हुये देख कर मयूर ने उस पर कर्ण मार्ग से गिर कर उसे पकड़ लिया। दोनों की चाल यदि समान हो, तो बिल से कितने हाथ की दूरी पर उन दोनों का योग हुआ, यह शीघ्र बताओ।

न्यासः ।



स्तम्भः ९ । अहिविलान्तरम् २७ जाता विलयुत्योर्मध्ये हस्ताः १२ ।

उदाहरण—यहाँ स्तम्भ = कोटि = ९ हाथ। अहिबिलान्तर = भु + क = २७ हाथ। अब सूत्र के अनुसार—स्तम्भ ९ का वर्ग ८१ को अहिबिलान्तर २७ से भाग देकर लब्धि ३ को अहिबिलान्तर २७ में घटा कर आधा करने पर भुज = ($\frac{२७-३}{२}$) = १२ हुआ। अतः बिल से १२ हाथ पर दोनों का योग हुआ। २७ − १२ = १५ = कर्ण।

कोटिकर्णान्तरे भुजे च दृष्टे पृथक्करणसूत्रं वृत्तम्।

भुजाद्वर्गितात् कोटिकर्णान्तराप्तं द्विधा कोटिकर्णान्तरेणोनयुक्तम्।
तदर्धे क्रमात् कोटिकर्णौ भवेतामिदं धीमताऽऽवेद्य सर्वत्र योज्यम्॥
सखे पद्मतन्मज्जनस्थानमध्यं भुजः कोटिकर्णान्तरं पद्मदृश्यम्।
नलः कोटिरेतन्मितं स्याद्यदम्भो वदैवं समानीय पानीयमानम्॥

भुजात् वर्गितात् कोटिकर्णान्तराप्तं द्विधा (स्थाप्यम्) कोटिकर्णान्तरेण ऊन युक्तं तदर्धं कार्यं। तदा क्रमात् कोटिकर्णौ भवेतां, इदं धीमता आवेद्य सर्वत्र योज्यम्॥ १२॥

हे सखे, पद्मतन्मज्जनस्थानमध्यं भुजः, पद्मदृश्यं कोटिकर्णान्तरं, नलः कोटिः एतन्मितं अम्भः स्यात्। एवं पानीयमानं समानीय वद॥ १३॥

भुज के वर्ग में कोटि और कर्ण के अन्तर से भाग देकर लब्धि में एक जगह कोटिकर्णान्तर घटाकर और दूसरी जगह में जोड़कर आधा करने से क्रम से कोटि और कर्ण होते हैं। इसे बुद्धिमान् समझ कर सभी जगह योजना करें।

इस श्लोक से ग्रन्थकार आगे के उदाहरण की क्षेत्रस्थिति बताते हैं—हे सखे! कमल और उसके डूबने की जगह के बीच की दूरी भुज है और कमल का दृश्यभाग कोटिकर्णान्तर है तथा नाल कोटि है। कोटि के तुल्य ही जल है अतः जल का प्रमाण बताओ॥ १३॥

उपपत्तिः—अत्र कोटिकर्णान्तरम् = अं।

तदा $भु^2 = क^2 - को^2 = (क + को)(क - को)$

$\therefore (क + को) = \frac{भु^2}{क - को} = \frac{भु^2}{अं}$। ततः संक्रमणेन

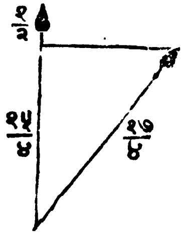
$$\text{कोटिः} = \frac{\frac{\text{भु}^{२}}{\text{अं}} - \text{अं}}{२} \text{ । कर्णः} = \frac{\frac{\text{भु}^{२}}{\text{अं}} + \text{अं}}{२}$$ । अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

चक्रक्रौञ्चाकुलितसलिले क्वापि दृष्टं तडागे
तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणम् ।
मन्दं मन्दं चलितमनिलेनाहतं हस्तयुग्मे
तस्मिन् मग्नं गणक कथय क्षिप्रमम्भः प्रमाणम् ॥ १ ॥

हे गणक ! चक्रवाक और क्रौंच (करांकुलपक्षी) से शोभित जल वाले किसी तालाब में जल से ऊपर १ बित्ता का कमल हवा के झोंक से धीरे २ चलकर दो हाथ पर डूब गया, तो जल का प्रमाण बताओ ।

न्यासः



कोटिकर्णान्तरम् $\frac{१}{२}$ । भुजः २ । लब्धं जलगाम्भीर्यम् $\frac{१५}{४}$ । इयं कोटिः $\frac{१५}{४}$ । इयमेव कोटिः कलिकामानयुता जातः कर्णः $\frac{१७}{४}$ ।

उदाहरण—यहाँ भुज = २ हाथ । कोटिकर्णान्तर = $\frac{१}{२}$ । अब भुजवर्ग ४ को कोटिकर्णान्तर से भाग देने पर लब्धि ($४ \div \frac{१}{२}$) = ८ में $\frac{१}{२}$ को ऋण और धन कर आधा करने से कोटि = $\left(\frac{८ - \frac{१}{२}}{२} \right) = \frac{१५}{४}$ हुई और कर्ण = $\left(\frac{८ + \frac{१}{२}}{२} \right)$ = $\frac{१७}{४}$ हुआ ।

कोट्येकदेशेन युते कर्णे भुजे च दृष्टे कोटिकर्णज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम् ।

द्विनिघ्नतालोच्छ्रितिसंयुतं यत् सरोऽन्तरं तेन विभाजितायाः।
तालोच्छ्रितेस्तालसरोऽन्तरघ्न्या उड्डीनमानं खलु लभ्यते तत् ॥१३॥

द्विनिघ्नतालोच्छ्रितिसंयुतं यत् सरोऽन्तरं तेन विभाजितायाः तालसरोऽन्तरघ्न्याः तालोच्छ्रितेर्यल्लभ्यते तत् खलु उड्डीनमानं स्यात् ।

सरोऽन्तर (वृक्ष और तालाब की दूरी) से युत जो द्विगुणित तालोच्छ्रिति

(वृक्ष की ऊँचाई) उससे ताल सरोऽन्तर से गुणित ताल (वृक्ष) की ऊँचाई में भाग देने पर उड्डीयनमान होता है।

उपपत्तिः—अत्र तालोच्छ्रितिः = ता उ· । तालसरोऽन्तरम् = स· अं· । उड्डीनमानम् = य ।

ता· उ· + स· अं = य + कर्ण

वा, २ ता· उ + स· अं = ता· उ + य + कर्ण = को + कर्ण परन्तु $स\cdot अं^2 =$ $भु^2 = क^2 - को^2 = (क + को) (क - को)$

$$\therefore\ क - को = \frac{स\cdot अं^2}{क + को} = \frac{स\cdot अं^2}{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं}$$

ततः संक्रमणेन—

$$को = \frac{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं - \dfrac{स\cdot अं^2}{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं}}{२} = ता\cdot उ + य$$

$$\therefore\ य = \frac{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं - \dfrac{स\cdot अं^2}{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं}}{२} - ता\cdot उ$$

$$= \frac{(२\ ता\cdot उ + स\cdot अं)^2 - स\cdot अं^2}{२ (२\ ता\cdot उ + स\cdot अं)} - ता\cdot उ$$

$$= \frac{४\ ता\cdot उ^2 + ४\ ता\cdot उ \times स\cdot अं + स\cdot अं^2 - स\cdot अं^2}{२ (२\ ता\cdot उ + स\cdot अं)} - ता\cdot उ$$

$$= \frac{४\ ता\cdot उ^2 + ४\ ता\cdot उ \times स\cdot अं}{२ (२\ ता\cdot उ + स\cdot अं)} - ता\cdot उ$$

$$= \frac{२\ ता\cdot उ^2 + २\ ता\cdot उ \times स\cdot अं - ता\cdot उ (२\ ता\cdot उ + स\cdot अं)}{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं}$$

$$= \frac{२\ ता\cdot उ^2 + २\ ता\cdot उ \times स\cdot अं - २\ ता\cdot उ^2 - स\cdot अं \times ता\cdot उ}{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं}$$

$$= \frac{ता\cdot उ \times स\cdot अं}{२\ ता\cdot उ + स\cdot अं}$$ उपपन्नम्

अथवा कोटिः = ता· उ + य, भुजः = स· अं । अत्र गत्योः साम्यात्—

कर्णः = ता· उ + स· अं· − य

$\therefore\ कर्ण^2 = (ता\cdot उ\cdot + स\cdot अं\cdot - य)^2 = (ता\cdot उ + य)^2 + (स\cdot अं^2)$

$$\therefore \text{ता· उ}^2 + \text{स· अं·}^2 + \text{य}^2 + \text{२ ता· उ·} \times \text{स· अं·} - \text{२ ता· उ·} \times \text{य} - \text{२ स· अं·} \times \text{य} = \text{ता· उ·}^2 + \text{य}^2 + \text{स· अं}^2 + \text{२ ता· उ·} \times \text{य}$$

$$\therefore \text{४ ता· उ·} \times \text{य} + \text{२ स· अं·} \times \text{य} = \text{२ ता· उ·} \times \text{स· अं·}$$

$$\therefore \text{२ ता· उ·} \times \text{य} + \text{स· अं} \times \text{य} = \text{ता· उ} \times \text{स· अं}$$

$$\therefore \text{य} \left(\text{२ ता· उ} + \text{स· अं} \right) = \text{ता· उ} \times \text{स· अं}$$

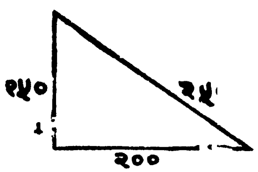
$$\therefore \text{य} = \frac{\text{ता· उ} \times \text{स· अं}}{\text{२ ता· उ} + \text{स· अं}}, \text{ अत उपपन्नम् ।}$$

उदाहरणम् ।

वृक्षाद्धस्तशतोच्छ्रयाच्छतयुगे वाप्यीं कपिः कोऽप्यगा-
दुत्तीर्याथ परो द्रुतं श्रुतिपथेनोड्डीय किञ्चिद्द्रुमात् ।
जातैवं समता तयोर्यदि गतावुड्डीनमानं कियद्-
विद्वँश्चेत् सुपरिश्रमोऽस्ति गणिते क्षिप्रं तदाऽऽचक्ष्व मे ।। १ ।।

एक बन्दर १०० हाथ ऊँचे पेड़ से उतर कर २०० हाथ की दूरी पर स्थित तालाब में गया। दूसरा बन्दर उसी स्थान से कुछ ऊपर उछल कर कर्ण मार्ग से तालाब में गया। उन दोनों की चाल यदि बराबर हो, तो वह कितना ऊपर उछला यह बताओ। यदि तुम गणित में परिश्रम किये हो, तो शीघ्र कहो।

न्यासः ।



वृक्षवाप्यन्तरम् २०० । वृक्षोच्छ्रायः १०० लब्धमुड्डीनमानम् ५०। कोटिः १५० । कर्णः २५० । भुजः २०० ।

उदाहरण—वृक्ष और सरोवर की दूरी = २०० हाथ । वृक्ष की ऊँचाई = १०० हाथ। अब सूत्र के अनुसार द्विगुणित वृक्ष की ऊँचाई में सरोऽन्तर जोड़ने पर (१०० × २ + २००) = ४०० हुआ। इससे वृक्ष की ऊँचाई से गुणित सरोऽन्तर (१०० × २००) = २०००० में भाग देने पर (२००० ÷ ४००) = ५० उड्डीनमान हुआ। अब कोटि = वृक्ष की ऊँचाई में युत उड्डीनमान = १०० + ५० = १५०। भुज = २०० अतः कर्ण = $\sqrt{(१५०)^2 + (२००)^2}$ = $\sqrt{२२५०० + ४००००}$ = $\sqrt{६२५००}$ = २५०।

विशेष—'द्विनिघ्नतालोच्छ्रितिसंयुतं यत्' इस सूत्र के अनुसार उड्डीनमान $= \frac{\text{ता० उ०} \times \text{ता० स० अं०}}{\text{२ ता० उ०} + \text{ता० स० अं०}}$ । यहाँ=उड्डीनमान = समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक का एक हिस्सा । ता० उ० = तालोच्छ्रिति = उसी भुजा का शेष भाग । ता स अं = ताल सरोन्तर = समकोण बनाने वाली दूसरी भुजा । अतः इस विशेष उदाहरण से यह सामान्यीकरण (Ceneralitaion) होता है कि यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा, तथा कर्ण और दूसरी भुजा के एक टुकड़े का योग मालूम हो, साथ ही यदि वह योग ज्ञात भुजा और अज्ञात भुजा के शेष टुकड़े के योग के बराबर हो, तो कर्ण और अज्ञात भुजा दोनों जाने जा सकते हैं, अन्यथा नहीं ।

उदाहरण

किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक ११२ फीट है । यदि उसका कर्ण और दूसरी भुजा के एक टुकड़े का योग १६८ फीट हो और इसी के बराबर यदि पहली भुजा और दूसरी भुजा के शेष टुकड़े का योग हो, तो कर्ण और कोटि अलग-अलग बताओ ।

समकोण बनाने वाली अज्ञात भुजा का एक टुकड़ा

$$= \frac{\text{अज्ञात भुजा दूसरा टुकड़ा} \times \text{ज्ञात भुजा}}{\text{२ अज्ञात भु० का दूसरा टुकड़ा} + \text{ज्ञात भुजा}}$$

यहाँ अज्ञात भुजा का दूसरा टुकड़ा = (१६८ − ११२) = ५६ फीट और ज्ञात भुजा = ११२ फीट अतः अज्ञात भुजा का पहला टुकड़ा $= \frac{\text{५६} \times \text{११२}}{\text{११२} + \text{११२}}$ $= \frac{\text{५६} \times \text{११२}}{\text{२२४}} = \frac{\text{५६}}{\text{२}}$ = २८ फीट ।

∴ क = १६८ − २८=१४० फीट और अज्ञात भुजा=५६+२८=८४ फीट।

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

(१) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा ५ फीट है । उसकी दूसरी भुजा दो भागों में इस तरह बाँट दी गई है कि उसका एक हिस्सा और कर्ण का योग दूसरा हिस्सा और ज्ञात भुज के योग के बराबर है । यदि वह योग १५ फीट है, तो कर्ण और अज्ञात भुजा का मान बताओ ।

(२) एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा ७५ इंच है । उसकी दूसरी भुजा को इस तरह दो भागों में बाँट दिया गया है कि एक टुकड़ा और कर्ण

का योग दूसरा टुकड़ा और ज्ञात भुजा के योग के बराबर है। यदि वह योग १०० इञ्च है, तो कर्ण और अज्ञात भुजा बताओ।

(३) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा ४८ फीट है। उसकी दूसरी भुजा दो ऐसे हिस्सों में बाँट दी गई है कि एक हिस्सा और कर्ण का योग दूसरा हिस्सा और ज्ञात भुजा के योग के बराबर है। यदि वह योग ९६ फीट है, तो कर्ण और अज्ञात भुजा अलग-अलग बताओ।

(४) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा २७ गज है। उसकी दूसरी भुजा दो ऐसे हिस्सों में बाँट दी गई है कि एक हिस्सा और कर्ण का योग दूसरा हिस्सा और ज्ञात भुजा के योग के बराबर है। यदि वह योग ५४ गज हो, तो कर्ण और अज्ञात भुजा अलग-अलग बताओ।

(५) समकोण त्रिभुज के कर्ण और अज्ञात भुजा बताओ, यदि एक भुजा कर्ण और दूसरी भुजा के एक टुकड़े का योग तथा ज्ञात भुजा और दूसरे टुकड़े का योग निम्नलिखित हों:—

भु, क + दूसरी भुजा का पहला टुकड़ा = ज्ञात भुजा + दूसरी भु २ रा टुकड़ा

(६)	१६ फीट	३२ फीट	और ३२ फीट
(७)	२१ फीट	४२ फीट	और ४२ फीट
(८)	५७ इञ्च	११४ इञ्च	और ११४ इञ्च
(९)	४५ गज	९० गज	और ९० गज
(१०)	३६ फीट	७२ फीट	और ७२ फीट
(११)	६० फीट	१२० फीट	और १२० फीट
(१२)	७ गज	२८ गज	और २८ गज
(१३)	८ इञ्च	२० इञ्च	और २० इञ्च

भुजकोट्योर्योगे कर्णे च ज्ञाते पृथक्करणसूत्रं वृत्तम्।

कर्णस्य वर्गाद्द्विगुणाद्विशोध्यो
दोःकोटियोगः स्वगुणोऽस्य मूलम्।

योगो द्विघ्ना मूलविहीनयुक्तः
स्यातां तदर्धे भुजकोटिमाने ॥ १४ ॥

द्विगुणात् कर्णस्य वर्गात् दोः कोटियोगः स्वगुणः विशोध्यः, अस्य मूलं ग्राह्यम् । योगः द्विधामूलविहीनयुक्तः तदर्धे क्रमेण भुजकोटिमाने स्याताम् ।

कर्ण के वर्ग को दो से गुणाकर गुणन फल में भुज और कोटि के योग का वर्ग घटावें । शेष के मूल को योग (भुज कोटि का योग) में एक जगह घटा कर और दूसरी जगह जोड़कर आधा करने पर क्रम से भुज और कोटि होते हैं ।

उपपत्तिः—कल्प्यते भु· + को· = यो·, कर्णः = क । तदा $\text{यो}^2 = (\text{भु}+\text{को})^2$

$= \text{भु}^2 + \text{को}^2 + २\ \text{भु} \times \text{को} = \text{क}^2 + २\ \text{भु} \times \text{को}$

$\therefore\ \text{यो}^2 = \text{क}^2 + २\ \text{भु} \times \text{को}$

$\therefore\ \text{यो}^2 + \text{क}^2 = २\ \text{क}^2 + २\ \text{भु} \times \text{को}$

$\therefore\ \underline{\text{क}^2} - २\ \text{भु} \times \text{को} = २\ \text{क}^2 - \text{यो}^2$

$\therefore\ \text{भु}^2 + \text{को}^2 - २\ \text{भु} \times \text{को} = २\ \text{क}^2 - \text{यो}^2$

$\therefore\ (\text{को} - \text{भु})^2 = २\ \text{क}^2 - \text{यो}^2$

$\therefore\ (\text{को} - \text{भु}) = \sqrt{२\ \text{क}^2 - \text{यो}^2} = \text{मूल}$

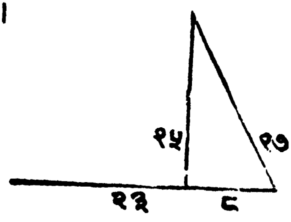
ततः संक्रमणगणितेन—$\text{भु} = \frac{\text{यो} - \text{मू}}{२}$, $\text{को} = \frac{\text{यो} + \text{मू}}{२}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

दश सप्ताधिकाः कर्णस्त्र्यधिका त्रिंशतिः सखे ।
भुजकोटियुतिर्यत्र तत्र ते मे पृथग्वद ॥ १ ॥

हे मित्र ! जहाँ कर्ण १७ है और भुजकोटि का योग २३ है, वहाँ भुज और कोटि का मान अलग-अलग बताओ ।

न्यासः ।



कर्णः १७। दोःकोटियोगः २३ ।

जाते भुजकोटी ८ । १५ ।

उदाहरण—कर्ण = १७। भुज कोटि योग = २३। अब कर्ण १७ का वर्ग २८९ को द्विगुणित करने पर (२८९ × २) = ५७८ हुआ। इसमें योग २३ का वर्ग ५२९ घटा कर (५७८ − ५२९) = ४९ शेष का मूल ७ हुआ। ७ को योग २३ में क्रम से धन ऋण कर आधा करने से भुज $\left(\frac{२३-७}{२} \right) = ८$ और कोटि $= \frac{२३+७}{२} = १५$ हुये।

उदाहरणम्।

दोःकोट्योरन्तरं शैलाः कर्णो यत्र त्रयोदश।
भुजकोटी पृथक् तत्र वदाशु गणकोत्तम॥ २॥

हे गणकश्रेष्ठ! जहाँ भुजकोटि का अन्तर ७ है और कर्ण १३ है, वहाँ भुज और कोटि का मान बताओ।

न्यासः

कर्णः १३। भुजकोट्यन्तरम् ७। लब्धे भुजकोटी ५। १२

१२ \१३

५

उदाहरण—कर्ण = १३, भुजकोट्यन्तर = ७। अब पूर्वरीति से द्विगुणित-कर्णवर्ग (१६९ × २) = ३३८ में भुजकोट्यन्तर ७ का वर्ग ४९ को घटाकर २८९ का मूल १७ हुआ। १७ को अन्तर ७ में जोड़ और घटाकर आधा करने से कोटि १२ और भुज ५ हुये।

परिशिष्ट।

किसी जात्य (समकोण) त्रिभुज में कर्ण और एक भुजा का योग, या अन्तर दिया हुआ हो और दूसरी भुजा मालूम हो, तो कर्ण और अज्ञात भुजा अलग-अलग मालूम हो जाती है। इसी तरह यदि उक्त त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं का योग, या अन्तर ज्ञात हो तथा कर्ण मालूम हो तो अज्ञात भुजायें अलग-अलग मालूम हो जाती हैं। यथा—$क^२ = लं^२ + आ^२$, $\therefore लं^२ = क^२ - आ^२$ वा $लं^२ = (क + आ) (क - आ)$

$$\therefore क \;\; आ = \frac{लं^२}{क - आ}, \text{ और } क - आ = \frac{लं^२}{क + आ} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

इसी तरह $\text{क} + \text{लं} = \dfrac{\text{आ}^{2}}{\text{क} - \text{लं}}$, और $\text{क} - \text{लं} = \dfrac{\text{आ}^{2}}{\text{क} + \text{लं}}$ ....(२)

$(\text{भु} + \text{को})^{2} = (\text{आ} + \text{लं})^{2} = \text{आ}^{2} + \text{लं}^{2} + 2\ \text{आ} \times \text{लं} = \text{क}^{2} + 2\text{आ} \times \text{लं}$

$\therefore 2\ \text{आ} \times \text{लं} = (\text{आ} + \text{लं})^{2} - \text{क}^{2}$ ।

$\therefore 4\ \text{आ} \times \text{लं} = 2\ (\text{आ} + \text{लं})^{2} - 2\ \text{क}^{2}$ ।

$\therefore (\text{आ} + \text{लं})^{2} - 4\ \text{आ} \times \text{लं} = (\text{आ} + \text{लं})^{2} - 2\ (\text{आ} + \text{लं})^{2} + 2\ \text{क}^{2}$

या $-(\text{आ} - \text{लं})^{2} = 2\ \text{क}^{2} - (\text{आ} + \text{लं})^{2}$

$\therefore (\text{आ} - \text{लं} = \sqrt{2\ \text{क}^{2} - (\text{आ} + \text{लं})^{2}}$ ....(३)

इसी तरह $(\text{आ} + \text{लं}) = \sqrt{2\ \text{क}^{2} - (\text{आ} - \text{लं})^{2}}$ .... (४)

अब (१), (२), (३) और (४) समीकरण पर से संक्रमण गणित की सहायता से अज्ञात राशियों का ज्ञान आसान है।

उदहारण—

(१) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा १५ फीट है। यदि उसकी दूसरी भुजा और कर्ण का योग २५ फीट हों, तो कर्ण और अज्ञात भुजा अलग-अलग बताओ।

$\because \text{क} - \text{आ} = \dfrac{\text{लं}^{2}}{\text{क} + \text{आ}}$ । यहाँ प्रश्न के अनुसार ल = १५ फीट, और

क + आ = २५ फीट हैं।

$\therefore \text{क} - \text{आ} = \dfrac{15^{2}}{25} = \dfrac{225}{25} = 9$ फीट।

$\therefore \text{क} = \dfrac{25 + 9}{2} = \dfrac{34}{2} = 17$ फीट।

और $\text{आ} = \dfrac{25 - 9}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ फीट।

$\therefore$ क = १७ फीट, अज्ञात भुजा = ८ फीट।

(२) किसी समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक २४ इञ्च है। यदि उसकी दूसरी भुजा और कर्ण का अन्तर ८ इञ्च हो, तो कर्ण और दूसरी भुजा अलग-अलग बताओ।

$\because \text{क} + \text{लं} = \dfrac{\text{आ}^{2}}{\text{क} - \text{लं}}$ । यहाँ आ = २४ इञ्च और क − लं = ८ इञ्च।

$\because \text{क} + \text{लं} = \dfrac{24^{2}}{8} = \dfrac{576}{8} = 72$ इञ्च।

$\therefore$ क $= \frac{७२+८}{२} = \frac{८०}{२} = ४०$ इञ्च।

और लं $= \frac{७२-८}{२} = \frac{६४}{२} = ३२$ इञ्च।

(१) एक समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं का योग ३६४ फीट और कर्ण २६० फीट हैं, तो उसकी भुजायें अलग-अलग बताओ।

$\because$ आ − लं $= \sqrt{२\text{क}^२ - (\text{आ}+\text{लं})^२}$। यहाँ क $= २६०$ फीट और आ + लं $= ३६४$ फीट।

$\therefore$ आ − लं $= \sqrt{२ \times २६०^२ - ३६४^२} = \sqrt{२ \times ६७६०० - १३२४९६}$

$= \sqrt{१३५२०० - १३२४९६} = \sqrt{२७०४} = \sqrt{१३ \times २०८} =$

$\sqrt{१३ \times १३ \times ४ \times ४}$

$= \sqrt{१३^२ \times ४^२} = १३ \times ४ = ५२$ फीट।

$\therefore$ आ $= \frac{३६४+५२}{२} = \frac{४१६}{२} = २०८$ फीट।

और लं $= \frac{३६४-५२}{२} = \frac{३१२}{२} = १५६$ फीट।

(४) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं का अन्तर ११ इञ्च और कर्ण ५५ इञ्च हैं, तो उसकी भुजायें अलग-अलग बताओ।

$\because$ आ + लं $= \sqrt{२\text{क}^२ - (\text{आ}-\text{लं})^२}$। यहाँ कर्ण $= ५५$ इञ्च।

और (आ − लं) $= ११$ इञ्च है।

$\therefore$ आ + लं $= \sqrt{२ \times ५५^२ - ११^२} = \sqrt{११^२(२ \times ५^२ - १)}$

$= \sqrt{११^२ \times (५०-१)} = \sqrt{११^२ \times ४९} = \sqrt{११^२ \times ७^२}$

$= ११ \times ७ = ७७$ फीट।

अब, आ $= \frac{७७+११}{२} = \frac{८८}{२} = ४४$ फीट।

और लं $= \frac{७७-११}{२} = \frac{६६}{२} = ३३$ फीट।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

(१) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा ५८८ इञ्च और कर्ण तथा दूसरी भुजा का योग ८८२ इञ्च हैं, तो कर्ण और दूसरी भुजा अलग-अलग बताओ।

(२) किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा ३९२५ गज और कर्ण तथा दूसरी भुजा का अन्तर ६२५ गज हैं, तो कर्ण और अज्ञात भुजा अलग-अलग बताओ।

(३) एक १०८ फीट ऊँचा ताल का पेंड़ समतल भूमि में खड़ा था। एक दिन हवा के वेग से कुछ दूर पर से वह वृक्ष टूट गया, लेकिन टूटा हुआ हिस्सा वृक्ष से बिल्कुल अलग नहीं हुआ बल्कि वह झुक कर वृक्ष की जड़ से ३६ फीट की दूरी पर जमीन में लग गया, तो वह वृक्ष कितनी उँचाई पर से टूटा यह बताओ।

(४) किसी तालाब में एक कमल खिला था जिसका १ गज पानी की सतह से ऊपर उठा था। हवा के झोंके से धीरे-धीरे चल कर वह कमल उस जगह से ५ गज की दूरी पर डूब गया, तो पानी की गहराई बताओ।

(५) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं का अन्तर २३ फीट और कर्ण ११५ फीट हैं, तो भुजाओं के मान अलग-अलग बताओ।

(६) किसी समकोण त्रिभुज का भुजयोग १०८ फीट और उसका कर्ण ४५ फीट हैं, तो समकोण बनाने वाली भुजायें अलग-अलग बताओ।

(७) किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण ६० फीट है। यदि समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक दूसरे का $\frac{3}{4}$ हो, तो उनका मान अलग-अलग बताओ।

(८) एक सीढ़ी की लम्बाई, किसी घर की ऊँचाई के बराबर है। यदि सीढ़ी की जड़ घर से ८ फीट अलग कर देते हैं, तो सीढ़ी घर की चोटी से २ फीट नीचे चली जाती है, तो सीढ़ी की ऊँचाई बताओ।

(९) एक २५ फीट लम्बी सीढ़ी किसी घर के सहारे सीधी खड़ी है, तो उसकी जड़ को घर से कितना हटा दें कि उसकी चोटी १ फीट नीची हो जाय।

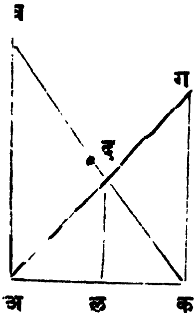
(१०) किसी समकोण त्रिभुज का भुजयोग ३६ फीट और उसका कर्ण १५ फीट है, तो उनकी भुजायें अलग-अलग बताओ।

लम्बावबाधाज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तम्।

अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगाद्वेण्वोर्वधे योगहृतेऽवलम्बः।
वंशौ स्वयोगेन हृतावभीष्टभूघ्नौ च लम्बोभयतः कुखण्डे ॥१५॥

वेण्वोः वधे योगहृते अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगात् अवलम्बः स्यात्। अभीष्ट-भूघ्नौ वंशौ स्वयोगेन हृतौ, लम्बोभयतः कुखण्डे च स्याताम्।

दोनों बाँसों के गुणनफल को बाँसों के योग से भाग दें, तो परस्पर बाँसों के मूल और चोटी को मिलाने वाली रेखाओं के योग बिन्दु से (भूमि पर) लम्ब का मान आ जायगा। इष्ट आधार से दोनों बाँसों को अलग-अलग गुणा कर उनमें बाँसों के योग से भाग दें, तो लम्ब के दोनों तरफ की आबाधा के मान मालूम हो जायेंगे।



उपपत्तिः—अत्र अ घ = बृहद्वंशः, क ग = लघुवंशः, द ल=लम्बः। अन्योन्यमूलाग्रगतसूत्रे अ ग, क घ। अनयोर्योगबिन्दुः = द। अ ल = बृहदाबाधा = बृ· आ·। ल क=ल· आ·। अ क = भूमिः। अथ अ घ क, द ल क त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन—$\text{ल· आ·} = \text{ल क} = \dfrac{\text{अ क} \times \text{द ल}}{\text{अ घ}} = \dfrac{\text{भू} \times \text{लं}}{\text{बृ· वं·}}$।

एवं $\text{बृ· आ·} = \text{अ ल} = \dfrac{\text{अ क} \times \text{द ल}}{\text{क ग}} = \dfrac{\text{भू} \times \text{लं}}{\text{ल· वं·}}$।

$$\therefore \text{ल· आ} + \text{बृ· आ·} = \frac{\text{भू} \times \text{लं}}{\text{बृ· वं·}} + \frac{\text{भू} \times \text{लं}}{\text{ल· वं·}}$$

$$= \frac{\text{भू} \times \text{लं} \times \text{ल· वं} + \text{भू} \times \text{लं} \times \text{बृ· वं·}}{\text{बृ· वं} \times \text{ल· वं·}} = \frac{\text{भू} \times \text{लं}\,(\text{ल· वं·} + \text{बृ· वं·})}{\text{बृ· वं} \times \text{ल· वं}}$$

$= \text{अक} = \text{भूमि}$।

$$\therefore \text{लं} = \frac{\text{भू} \times \text{बृ· वं·} \times \text{ल· वं}}{\text{भू}\,(\text{ल· वं} \times \text{बृ· वं})} = \frac{\text{बृ· वं} \times \text{ल· वं·}}{\text{ल· वं} + \text{बृ· वं}} \text{।}$$

$$\text{अथ ल·आ} = \frac{\text{भू} \times \text{लं}}{\text{बृ· वं·}} = \frac{\text{भू} \times \text{बृ· वं} \times \text{ल· वं·}}{\text{बृ वं}\,(\text{ल· वं} + \text{बृ· वं})} = \frac{\text{भू} \times \text{ल वं}}{\text{ल· वं} + \text{बृ· वं}} \text{।}$$

$$\text{एवं बृ· आ} = \frac{\text{भू} \times \text{लं}}{\text{ल· वं}} = \frac{\text{भू} \times \text{बृ· वं} \times \text{ल· वं}}{\text{ल· वं}\,(\text{ल· वं} + \text{बृ· वं})} = \frac{\text{भू} \times \text{बृ· वं}}{\text{ल· वं} + \text{बृ· वं}}$$

अत उपपन्नम्।

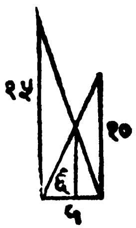
उदाहरणम्।

पञ्चदशदशकरोच्छ्रयवेण्वोरज्ञातमध्यभूमिकयोः।
इतरेतरमूलाग्रगसूत्रयुतेर्लम्बमानमाचक्ष्व ॥ १ ॥

समान भूमि में एक १५ हाथ और दूसरा १० हाथ का बाँस खड़ा है। यदि एक की जड़ से दूसरे के अग्र पर्यन्त परस्पर रस्सी बाँध दी जाँय, तो दोनों

रस्सियों के योग से भूमि पर लम्ब का मान बताओ। यहाँ दोनों बाँसों की दूरी अज्ञात है।

न्यासः।



वंशौ १५ । १० । जातो लम्बः ६ । वंशान्तरभूः ५ । अतो जाते भूखण्डे ३ । २ । अथवा भूः १० । खण्डे ६।४। वा भूः १० । खण्डे ६।६। वा भूः २० । खण्डे १ । ८ एवं सर्वत्र लम्बः स एव । यद्यत्र भूमितुल्ये भुजे वंशः कोटिस्तदा भूखण्डेन किमिति त्रैराशिकेन सर्वत्र प्रतीतिः ।

उदाहरण—यहाँ बाँस १५ और १० हाथ लम्बे हैं। अब सूत्र के अनुसार दोनों बांसों के गुणन फल (१५ × १०)=१५० में, बाँसों के योग (१५+१०)= २५ से भाग देने पर लब्धि ६ लम्ब का मान हुआ। यहाँ यदि इष्ट भूमि ५ हाथ मानें, तो इससे दोनों बाँसों को अलग-अलग गुणा कर बाँसों का योग २५ से भाग देने पर प्रथम आबाधा $= \frac{१५ \times ५}{२५} = ३$ और द्वितीय आबाधा $= \frac{१० \times ५}{२५} = २$ हाथ।

यदि वंशान्तर भूमि १० हो, तो उक्तरीति से दोनों आबाधायें ६ और ४ होंगी। इसी तरह वंशान्तर भूमि १५ एवं २० पर से भी आबाधा लानी चाहिए।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

(१) दो बिजली के खम्भे की ऊँचाई क्रम से ३० फीट और ४४ फीट हैं, तो परस्पर एक की जड़ से दूसरे की चोटी तक गये हुये तारों के योग बिन्दु की ऊँचाई बताओ।

(२) दो मीनार की ऊँचाई क्रम से ८० गज और ९० गज हैं। यदि उन दोनों के बीच की दूरी ८५ गज हो, तो परस्पर एक की जड़ से दूसरे की चोटी तक गये हुये सूत्रों के योग बिन्दु से जमीन पर लम्ब का मान तथा लम्ब के मूल से दोनों मीनार की दूरी बताओ।

(३) दो घर की ऊँचाई क्रम से १४ और १६ गज है, तो परस्पर एक की जड़ से दूसरे की छत तक गये हुये रस्सियों के योग से जमीन पर लम्ब का मान बताओ।

(४) किसी पर्वत की तीन श्रेणियाँ हैं, जिनमें बीच की श्रेणी सबसे नीची है। दोनों तरफ की श्रेणियों की ऊँचाई क्रम से २०० और ३०० गज हैं। यदि परस्पर एक की जड़ से दूसरे की चोटी तक बंधे हुये सूत्रों के योग बिन्दु बीच वाली श्रेणी की चोटी पर हो, तो बीच की श्रेणी की ऊँचाई बताओ।

अक्षेत्रलक्षणसूत्रम्।

धृष्टोद्दिष्टमृजुभुजं क्षेत्रं यत्रैकबाहुतः स्वल्पा।
तदितरभुजयुतिरथ वा तुल्या ज्ञेयं तदक्षेत्रम् ॥ १६ ॥

यत्र एकबाहुतः तदितरभुजयुतिः स्वल्पा, अथवा तुल्या भवेत् तत् धृष्टोद्दिष्टं ऋजुभुजं क्षेत्रं अक्षेत्रं ज्ञेयम्।

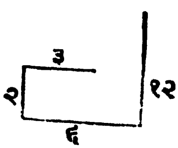
जिस क्षेत्र (त्रिभुज चतुर्भुज आदि) में एक भुज से शेष भुजों का योग अल्प वा तुल्य हो, तो उसे अक्षेत्र समझना चाहिये, अर्थात् वैसा क्षेत्र नहीं बन सकता है।

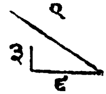
उपपत्तिः—त्रिभुजे भुजद्वययोगस्तृतीयभुजादधिको भवतीति क्षेत्रमिति नियमेनास्य वासना स्पष्टेत्यलम्।

उदाहरणम्।

चतुरस्रे त्रिषड्द्व्यर्का भुजास्त्र्यस्रे त्रिषण्णव।
उद्दिष्टा यत्र धृष्टेन तदक्षेत्रं विनिर्दिशेत् ॥ १ ॥
एते अनुपपन्ने क्षेत्रे।

किसी धृष्ट ने एक चतुर्भुज और एक त्रिभुज बताया, जिनमें चतुर्भुज की भुजायें क्रमसे ३, ६, २ और १२ तथा त्रिभुज की भुजायें ३, ६ और ९ हैं, लेकिन ये दोनों क्षेत्र उक्त रीति से अक्षेत्र हैं क्योंकि उक्त चतुर्भुज में तीन भुजाओं का योग चौथी भुजा से छोटा है और उक्त त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा के बराबर है।





भुजप्रमाणा ऋजुशलाका भुजस्थानेषु विन्यस्यानुपपत्तिर्दर्शनीया।

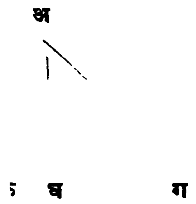
आबाधादिज्ञानाय करणसूत्रमार्याद्वयम्।

त्रिभुजे भुजयोर्योगस्तदन्तरगुणो भुवा हृतो लब्ध्या।
द्विष्ठा भूरूनयुता दलिताऽऽबाधे तयोः स्याताम्॥ १७॥
स्वाबाधाभुजकृत्योरन्तरमूलं प्रजायते लम्बः।
लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति॥ १८॥

त्रिभुजे भुजयोः योगः तदन्तरगुणः भुवा हृतः, भूः द्विष्ठा लब्ध्या ऊनयुता दलिता तयोः आबाधे स्याताम्। स्वाबाधाभुजकृत्योः अन्तरमूलं लम्बः प्रजायते। लम्बगुणं भूम्यर्द्धं त्रिभुजे स्पष्टं फलं भवति।

त्रिभुज में दो भुज के योग को उनके अन्तर से गुणा कर तीसरी भुजा (भूमि) से भाग देने पर लब्धि जो हो, उसे तीसरी भुजा (भूमि) में एक जगह घटा कर और दूसरी जगह जोड़ कर, दोनों का आधा करने से क्रम से लघु और बृहद् भुज की आबाधा होती है। अपनी आबाधा के वर्ग को अपनी भुजा के वर्ग में घटा कर मूल लेने पर लम्ब होता है। लम्ब को भूमि से गुणा कर उसका आधा करें, तो त्रिभुज का स्पष्ट फल होता है।

उपपत्तिः—अत्र अ क = प्र· भु·, अ ग = द्वि· भु·, क ग = भू = तृ· भु, क घ= प्र· आ, ग घ = द्वि· आ·, अ घ = लम्बः। अ क घ त्रिभुजे प्र· भु^{2} − प्र· आ^2 = लं^{2}, तथा अ ग घ त्रिभुजे द्वि· भु^{2} − द्वि· आ^2 = लं^{2},



अतः प्र· भु^{2} − प्र· आ^2 = द्वि· भु^{2} − द्वि· आ^2

∴ द्वि· भु^{2} − प्र· भु^{2} = द्वि· आ^2 − प्र· आ^2

∴ (द्वि· भु + प्र· भु·) (द्वि· भु − प्र भु) = (द्वि· आ + प्र· आ) (द्वि· आ − प्र· आ)

∴ (द्वि· भु + प्र· भु·) (द्वि· भु − प्र· भु·) = भू (द्वि· आ − प्र· आ)

∴ (द्वि· आ − प्र· आ) = $\dfrac{(\text{द्वि· भु + प्र· भु})(\text{द्वि· भु − प्र· भु})}{\text{भू}}$

$= \frac{\text{भु· यो} \times \text{भु· अं}}{\text{भू}} = \text{लब्धिः}$ । आबाधयोर्योगस्तु भूमितुल्यो ज्ञात एवातः संक्रमणेन—

$\text{प्र· आ·} = \frac{\text{भू} - \text{लब्धि}}{२}$, $\text{द्वि· आ} = \frac{\text{भू} + \text{लब्धि}}{२}$ ।

अ क घ जात्यत्रिभुजे $\text{अ क}^२ - \text{क घ}^२ = \text{अ घ}^२$, वा $\text{प्र भु}^२ - \text{प्र· आ}^२ = \text{लं}^२$

$\therefore \text{लं} = \sqrt{\text{प्र· भु}^२ - \text{प्र· आ}^२}$ । एवमेव अ ग घ जात्ये $\text{अ ग}^२ - \text{ग घ}^२ = \text{अ घ}^२$

$\therefore \text{द्वि भु}^२ - \text{द्वि· आ}^२ = \text{लं}^२$ । $\therefore \text{लं} = \sqrt{\text{द्वि· भु}^२ - \text{द्वि· आ}^२}$

अत उपपन्नं लम्बानयनपर्यन्तम् ।

अथायते भुजकोटिघाततुल्यं फलं भवन्यतः क घ, अ घ भुजकोटिभ्यां यदायतं तस्य फलम् = क घ × अ घ । परञ्च क घ, अ घ भुजकोटिभ्यां यदायतं तत् अ क घ त्रिभुजाद् द्विगुणमतः ।

$२ \triangle \text{अ क घ} = \text{क घ} \times \text{अ घ}$ ....(१)

एवमेव ग घ, अ घ भुजकोटिभ्यां यदायतं तस्य फलं = ग घ × अ घ इदमायतम् अ ग घ त्रिभुजाद्द्विगुणमतः $२ \triangle \text{अ ग घ} = \text{ग घ} \times \text{अ घ}$ ...(२)

(१), (२) अनयोर्योगेन

$२ \triangle \text{अ क घ} + २ \triangle \text{अ ग घ} = \text{क घ} \times \text{अ घ} + \text{ग घ} \times \text{अ घ}$

वा $२ (\triangle \text{अ क घ} + \triangle \text{अ ग घ}) = \text{अ घ} (\text{क घ} + \text{ग घ})$

वा $२ \triangle \text{अ क ग} = \text{अ घ} \times \text{क ग}$

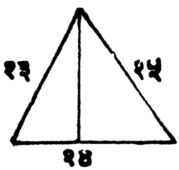
$\therefore \triangle \text{अ क ग} = \frac{\text{अ घ} \times \text{क ग}}{२} = \frac{\text{लं} \times \text{भू}}{२}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

क्षेत्रे मही मनुमिता त्रिभुजे भुजौ तु यत्र त्रयोदशतिथिप्रमितौ च यस्य ।
तत्रावलम्बकमथो कथयावबाधे क्षिप्रं तथा च समकोष्ठमितिं फलाख्याम् ॥

जिस त्रिभुज में भूमि १४ और भुजायें १३ और १५ हैं उसका लम्ब, आबाधा और समकोष्ठरूप फल के मान शीघ्र बताओ ।

न्यासः



भूः १४ । भुजौ १३।१५। लब्धे आबाधे ५ । ९ । लम्बश्च १२ । क्षेत्रफलं च ८४

उदाहरण—उपर्युक्त त्रिभुज में भुजद्वय का योग (१३ + १५) = २८ को उनके अन्तर (१५ − १३) = २ से गुणा करने पर (२८ × २) = ५६ हुआ। इसको भूमि १४ से भाग देने से (५६ ÷ १४) = ४ आया। इसे १४ में क्रम से घटा कर और जोड़ कर आधा करने से प्रथम आबाधा $= \frac{१४ - ४}{२} = \frac{१०}{२} = ५$ और द्वितीय आबाधा $= \frac{१४ + ४}{२} = \frac{१८}{२} = ९$।

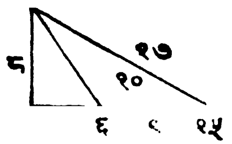
अब प्रथम आबाधा ५ का वर्ग २५ और प्रथम भुज १३ का वर्ग १६९ इन दोनों का अन्तर (१६९ − २५) = १४४ का मूल = १२ लम्ब हुआ। लम्ब १२ से भूमि १४ को गुणा कर दो से भाग देने पर $\frac{१४ \times १२}{२} = ८४$ क्षेत्र फल हुआ।

ऋणाबाधोदाहरणम्।

दशसप्तदशप्रमौ भुजौ त्रिभुजे यत्र नवप्रमा मही।
अवधे वद लम्बकं तथा गणितं गाणितिकाशु तत्र मे॥ २॥

जिस त्रिभुज की भुजायें क्रम से १० और १७ हैं और आधार ९ है तो आबाधा, लम्ब और क्षेत्र फल बताओ।

न्यासः।

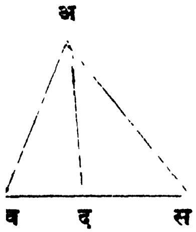


भुजौ १०। १७। भूमिः ९। अत्र त्रिभुजे भुजयोर्योग इत्यादिना लब्धम् २१। अनेन भूरूना न स्यात्। अस्मादेव भूरपनीता शेषार्धमृणगताऽऽबाधा दिग्वैपरीत्येनेत्यर्थः तथा जाते आबाधे ६। १५ अत उभयत्रापि जातो लम्बः ८ फलम् ३६।

उदाहरण—१० और १७ भुज हैं। भूमि = ९ है। अब सूत्र के अनुसार दोनों भुज के योग २७ को भुजद्वयान्तर ७ से गुणा कर भूमि ९ से भाग देने पर (२७ × ७ ÷ ९) = २१ लब्धि भूमि में नहीं घटेगी अतः लब्धि में ही भूमि को घटा कर आधा करने से ($\frac{२१ - ९}{२}$) = ६ पहली आबाधा हुई और दूसरी आबाधा = ($\frac{२१ + ९}{२}$) = १५। यहाँ पहली आबाधा ६ ऋणात्मिका है। लम्ब लाने के लिये प्रथम भुज १० के वर्ग १०० में प्र० आबाधा ६ का वर्ग घटा कर मूल लेने से — $\sqrt{(१०० - ३६)} = \sqrt{६४} = ८$ = लम्ब। त्रिभुजफलनयनार्थं लम्ब ८ को भूम्यर्ध से गुणा किया तो $\frac{८ \times ९}{२} = \frac{७२}{२} = ३६$ = त्रिभुज फल।

परिशिष्ट

समभुज त्रिभुज का लम्ब और क्षेत्रफल।



मान लिया कि अ व स एक त्रिभुज है जिसमें अ व = व स = अ स। अ बिन्दु से व स पर अ द लम्ब खींचा, तो रेखा गणित से यह स्पष्ट है कि अ द लम्ब व स को दो बराबर भागों में बांटेगा।

$\therefore$ व द = द स = $\frac{\text{व स}}{२}$। त्रिभुज अ व द में $\angle$ अ द व = ९०°, $\therefore$ अ द^२ = अ व^२ − व द^२,

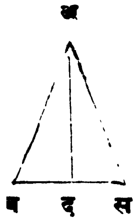
$\therefore$ अ द = $\sqrt{\text{अ व}^२ - \text{व द}^२}$ लेकिन यहाँ व द = $\frac{\text{व स}}{२} = \frac{\text{अ व}}{२} = \frac{\text{अ स}}{२}$

$\therefore$ अ द = $\sqrt{\text{अ व}^२ - \left(\frac{\text{अ व}}{२}\right)^२} = \sqrt{\text{अ व}^२ - \frac{\text{अ व}^२}{४}} = \sqrt{\frac{३\ \text{अ व}^२}{४}}$

= $\sqrt{\frac{३}{२}}$ अ व अतः समभुज त्रिभुज का लम्ब = $\sqrt{\frac{३}{२}}$ भुजा ·········(१)

$\therefore$ $\triangle$ अ व स का क्षेत्र फल = $\sqrt{\frac{३}{२}}$ भु × $\frac{\text{भु}}{२}$ = $\sqrt{\frac{३}{४}}$ भु^{२} ····· (२)

समद्विबाहु त्रिभुज का लम्ब और क्षेत्रफल।



कल्पना किया कि अ व स एक त्रिभुज है जिसमें अ व = अ स, अ बिन्दु से व स पर अ द लम्ब खींचा, तो रेखा गणित से व द = द स = $\frac{\text{व स}}{२}$। $\triangle$ अ व द में $\angle$ अ द व = ९०°

$\therefore$ अ द = $\sqrt{\text{अ व}^२ - \text{व द}^२} = \sqrt{\text{भु}^२ - \left(\frac{\text{आ}}{२}\right)^२}$

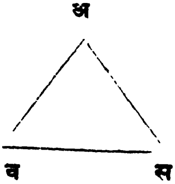
= $\sqrt{\text{भु}^२ - \frac{\text{आ}^२}{४}}$

$\therefore$ समद्विबाहु त्रिभुज का लम्ब = $\sqrt{\text{भु}^२ - \frac{\text{आ}^२}{४}}$ ·········(१)

$\therefore$ अ व स समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\text{आ}}{२} \times \sqrt{\text{भु}^२ - \frac{\text{आ}^२}{४}}$ ···(२)

अतः समद्विबाहु त्रिभुज की भुजा और आधार मालूम हो, तो उसका लम्ब और क्षेत्रफल निकाले जा सकते हैं।

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ।



कल्पना किया कि अ ब स एक त्रिभुज है, जिसमें ∠ब अ स = ९०°, अतः रेखा गणित से अ ब स त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\text{अ ब} \times \text{अ स}}{२}$

$\therefore$ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\text{समकोण बनाने वाली भुजाओं का घात}}{२}$

समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ।

यदि अ ब स त्रिभुज में अ ब = अ स, तो अ ब स एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज हो जायगा ।

$\therefore \triangle$ अ ब स $= \frac{\text{अ ब} \times \text{अ स}}{२} = \frac{\text{अ ब} \times \text{अ ब}}{२} = \frac{\text{अ ब}^२}{२}$

इससे यह सिद्ध होता है कि समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल बराबर भुजा के वर्ग का आधा होता है ।

उदाहरण ।

(१) किसी समभुज त्रिभुज की भुजा ७ फीट है, तो इसकी ऊँचाई और क्षेत्रफल बताओ ।

ऊँचाई $= \frac{१}{२}$ भु $\times \sqrt{३}$ । यहाँ भु = ७ फीट

$\therefore$ ऊँचाई $= \frac{१}{२} \times ७ \times \sqrt{३} = \frac{७\sqrt{३}}{२}$ फीट ।

क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{३}}{४}$ भु$^२ = \frac{\sqrt{३}}{४} \times ७^२ = \frac{\sqrt{३} \times ४९}{४}$ व॰ फी॰ ।

(२) किसी समभुज त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु से आधार पर का लम्ब १ फीट २ इञ्च है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

लम्ब $= \frac{\sqrt{३}}{२}$ भु, $\therefore$ भु $= \frac{२}{\sqrt{३}}$ लम्ब । यहाँ लम्ब=१ फी॰ २ इञ्च = १४ इञ्च । $\therefore$ भु $= \frac{२}{\sqrt{३}} \times १४ = \frac{२८}{\sqrt{३}}$ इञ्च ।

अब क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{३}}{४}$ भु$^२ = \frac{\sqrt{३}}{४} \times \left(\frac{२८}{\sqrt{३}}\right)^२$ व॰ इ॰

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{38 \times 38}{3}$ व० इ० $= \frac{7 \times 28}{\sqrt{3}}$ व० इ०

$= \frac{196}{\sqrt{3}}$ व० इ० ।

(३) एक समभुज त्रिभुजाकार उद्यान को घेरने में ४ आना प्रति गज की दर से ३३६ रु० खर्च होता है, तो किसी कोण से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु की दूरी बताओ ।

∵ प्रति गज चार आने ($\frac{1}{4}$ रु०) की दर से ३३६ रु० में (३३६ × ४ =) १३४४ गज घेरा जायगा ।

∴ उस समभुज त्रिभुज का भुजयोग = १३४४ गज

∴ उस त्रिभुज की एक भुजा = $\frac{1344}{3}$ ग० = ४४८ ग० ।

अब किसी कोण से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु की दूरी उस समभुज त्रिभुज का लम्ब है । ∴ अभीष्ट दूरी = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ भु = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ ४४८ गज = $\sqrt{3} \times$ २२४ गज ।

(४) किसी समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से एक ३० फीट है, यदि उसका आधार ४८ फीट हो, तो उसका लम्ब और क्षेत्रफल बताओ ।

लम्ब = $\sqrt{\text{बराबर भुजा}^2 - \frac{\text{आ}^2}{4}} = \sqrt{30^2 - 24^2} =$

$\sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18$ फी०

क्षेत्रफल = $\frac{\text{ल} \times \text{आ}}{2} = \frac{18 \times 48}{2}$ व० फीट = $\frac{9 \times 48}{}$ = ४३२ व० फीट

(५) किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजायें १२ और ९ फीट है तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समकोण बनानेवाली भुजाओं का गुणनफल = $\frac{1}{2} \times 12 \times 9$ = ५४ वर्ग फीट ।

(६) किसी समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल १ एकड़ और समकोण बनानेवाली भुजाओं में से एक ४८४ गज हैं, तो दूसरी भुजा बताओ ।

समकोण० व० अभीष्ट भुजा= $\frac{\text{२ क्षेत्रफल}}{\text{समकोण बनानेवाली १ भुजा}}$

$= \frac{२ \times १ \times ४८४०}{४८४}$ गज = २० गज ।

(७) एक समकोण त्रिभुज का कर्ण ८५ गज और एक भुजा ४० गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

यहाँ कर्ण = ८५ गज और एक भुजा ४० गज है ।

$\therefore$ दूसरी भुजा $= \sqrt{८५^२ - ४०^२} = \sqrt{(८५+४०)(८५-४०)} =$

$\sqrt{१२५ \times ४५} = \sqrt{२५ \times ५ \times ५ \times ९} = \sqrt{२५^२ \times ३^२} = २५ \times ३ = ७५$ गज ।

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \frac{४० \times ७५}{२} = २० \times ७५ = १५००$ व० गज ।

(८) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजा ५ गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}$भु$^२ = \frac{१}{२} \times ५^२ = \frac{२५}{२}$ वर्ग गज

$= \frac{२५}{१८}$ व० फी० = १ व० फी० ५६ वर्ग इञ्च ।

(९) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल १८ वर्ग गज है, तो उसकी समकोण बनानेवाली भुजायें बताओ । समकोण बनानेवाली भुजाओं में से प्रत्येक $= \sqrt{२ \text{ क्षे० फ०}} = \sqrt{२ \times १८} = \sqrt{३६} = ६$ गज ।

(१०) किसी त्रिभुज का लम्ब ४ फीट २ इञ्च और उसका आधार १ फीट ३ इञ्च हैं, तो क्षेत्रफल बताओ ।

लम्ब = ४ फी० २ इञ्च = ५० इञ्च । आधार = १ फी० ३ इञ्च = १५ इञ्च

$\therefore$ क्षे० फ० $= \frac{\text{लम्ब} \times \text{आ}}{२} = \frac{५० \times १५}{२} = २५ \times १५ = ३७५$ व० इञ्च ।

(११) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल २ एकड़ और उसका आधार १९३६ गज हैं, तो उसकी ऊँचाई बताओ ।

ऊँचाई (लम्ब) $= \frac{२ \text{ क्षे० फ०}}{\text{आधार}} = \frac{२ \times २ \times ४८४०}{१९३६}$ गज

$= \frac{४८४०}{४८४} = १०$ गज ।

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

(१) एक समभुज त्रिभुज की भुजा १८ फीट है, तो उसकी ऊँचाई बताओ ।

(२) तीन गाँव इस तरह बसे हुये हैं कि एक दूसरे के बीच की दूरी

२० माइल है। प्रत्येक दो गाँव के मध्य में एक हाई स्कूल है, तो तीसरे गाँव से उस स्कूल की दूरी बताओ।

(३) किसी समभुज त्रिभुजाकार मैदान को घेरने में २ आना प्रति गज की दर से १८ रु० १२ आना खर्च होता है, तो किसी कोने से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु की दूरी बताओ।

(४) कोई आदमी प्रतिघण्टा ६ माइल की दर से चलकर २० मिनट में एक समभुज त्रिभुज बनाता है, तो किसी कोण से सामने की भुजा के मध्य बिन्दु तक आने में उसे कितना समय लगेगा।

(५) एक समद्विबाहु त्रिभुज की ऊँचाई बताओ जिसकी बराबर भुजा और आधार क्रम से १५ फीट और १८ फीट है।

(६) किसी त्रिभुज की ऊँचाई १५ फीट और आधार २० फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(७) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ३०० वर्ग गज है। यदि उसका आधार २५ गज हो तो उसकी ऊँचाई बताओ।

(८) एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा १२ गज और उसका कर्ण २० गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(९) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ५६२५ व० फी० है, तो उसकी बराबर भुजा बताओ।

(१०) किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजा २५ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(११) किसी समभुज त्रिभुज की भुजा १३ गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१२) किसी समभुज त्रिभुज का क्षेत्रफल १६$\sqrt{३}$ वर्ग फीट है, तो उसकी भुजा बताओ।

(१३) किसी समकोण त्रिभुज की समकोण बनानेवाली भुजायें २७ और ३६ फीट हैं, तो उसका क्षेत्रफल और समकोण बिन्दु से कर्ण पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई बताओ।

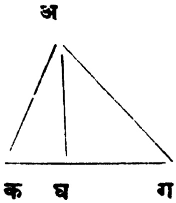
चतुर्भुजत्रिभुजयोरस्पष्टस्पष्टफलानयने करणसूत्रं वृत्तम् ।

सर्वदोर्युतिदलं चतुःस्थितं बाहुभिर्विरहितं च तद्वधात् ।
मूलमस्फुटफलं चतुर्भुजे स्पष्टमेवमुदितं त्रिबाहुके ॥१९॥

सर्वदोः युतिदलं चतुः स्थितं बाहुभिः विरहितं च तद्वधात् मूलं चतुर्भुजे स्फुटफलं स्यात्, त्रिबाहुके एवं स्पष्टं उदितम् ।

त्रिभुज या चतुर्भुज के सभी भुजाओं के योगार्ध को चार जगहों में रखकर उनमें क्रम से प्रत्येक भुजा को घटाकर जो शेष बचे उन सबों के गुणन फल का मूल लेने से त्रिभुज में वास्तव और चतुर्भुज में अवास्तव फल होता है ।

उपपत्तिः—अ क ग त्रिभुजे अ क=लघुभुजः, अ ग=बृहद्भुजः, क ग=भूमिः



क घ = लघ्वाबाधा, अ घ=लम्बः ततः । त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इत्यादिना $\text{क घ} = \dfrac{\text{क ग}^{2} - (\text{अ ग}^{2} - \text{अ क}^{2})}{\text{२ क ग}}$ ।

$$\text{अ क}^{2} - \text{क घ}^{2} = \text{अ घ}^{2} = \text{अ क}^{2} - \left\{\frac{\text{क ग}^{2} - (\text{अ ग}^{2} - \text{अ क}^{2})}{\text{२ क ग}}\right\}^{2}$$

परञ्च वर्गान्तरस्य योगान्तर घातसमत्वात् अ घ^{2}

$$= \left\{\text{अ क} + \frac{\text{क ग}^{2} - (\text{अ ग}^{2} - \text{अ क}^{2})}{\text{२ क ग}}\right\}\left\{\text{अ क} - \frac{\text{क ग}^{2} - (\text{अ ग}^{2} - \text{अ क}^{2})}{\text{२ क ग}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\text{२ अ क} \times \text{क ग} + \text{क ग}^{2} + \text{अ क}^{2} - \text{अ ग}^{2}}{\text{२ क ग}}\right\}$$

$$\left\{\frac{\text{२ अ क} \times \text{क ग} - \text{क ग}^{2} + \text{अ ग}^{2} - \text{अ क}^{2}}{\text{२ क ग}}\right\}$$

$$= \frac{\{(\text{अ क} + \text{क ग})^{2} - \text{अ ग}^{2}\}\{\text{अ ग}^{2} - (\text{अ क} - \text{क ग})^{2}\}}{\text{४ क ग}}$$

$$= \frac{(\text{अक}+\text{कग}+\text{अग})(\text{अक}+\text{कग}-\text{अग})(\text{अग}+\text{अक}-\text{कग})(\text{अग}+\text{कग}-\text{अक})}{\text{४ क ग}^{2}}$$

अयं लम्बवर्गो भूम्यर्धवर्गगुणस्तदा फलवर्गः =

$$\frac{(\text{अक}+\text{कग}+\text{अग})(\text{अग}+\text{कग-अग})(\text{अग}+\text{अक-कग})(\text{अग}+\text{कग-अक})}{\text{४ क ग}^{2}} \times \frac{\text{कग}^{2}}{\text{४}}$$

$= \frac{(अक + कग + अग)}{२} \frac{(अक + कग - अग)}{२} \frac{(अग + अक - कग)}{२} \frac{(अग + कग - अक)}{२}$

अत्र यदि $\frac{अक+कग+अग}{२}$ = भुजयोगार्धं = $\frac{यो}{२}$, तदा $\frac{अक+कग-अग}{२} = \frac{यो}{२} - अग$,

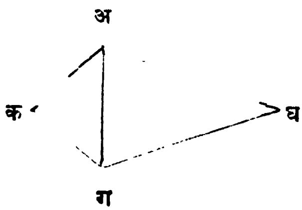
$\frac{अग + अक - कग}{२} = \frac{यो}{२} - कग$, $\frac{अग + कग - अक}{२} = \frac{यो}{२} - अक$

$\therefore$ फलवर्गः $= \frac{यो}{२}\left(\frac{यो}{२} - अग\right)\left(\frac{यो}{२} - कग\right)\left(\frac{यो}{२} - अक\right)$

$\therefore$ फल $= \sqrt{\frac{यो}{२}\left(\frac{यो}{२} - अग\right)\left(\frac{यो}{२} - कग\right)\left(\frac{यो}{२} - अक\right)}$ अत उपपन्नं त्रिभुज-फलानयनम् ।

अथ चतुर्भुज फलानयने तु कल्प्यते अकगघ चतुर्भुजं यस्य अक, कग, गघ, अघ, भुजाः, अग कर्णस्तदोक्तचतुर्भुजलम् = $\triangle$ अकग + $\triangle$ अघग परञ्च-त्रिकोणमित्या $\triangle$ अकग $= \frac{अक \times कग \times ज्या \angle अकग}{२}$, तथा

अघग $= \frac{अघ \times गघ \times ज्या \angle अघग}{२}$ ।



$\therefore$ चतुर्भुजफलम् $= \frac{अक \times कग}{२} \times$ ज्या $\angle$ अकग + $\frac{अघ \times गघ}{२} \times$ ज्या $\angle$ अघग ।

$\therefore$ ४ च·फ· = २ अक $\times$ कग $\times$ ज्या $\angle$ अकग + २ अघ $\times$ गघ $\times$ ज्या $\angle$ अघग ।

$\therefore$ १६ च·फ^२ = ४ अक^२ $\times$ कग^२ $\times$ ज्या^{२} $\angle$ अकग + ४ अघ^२ $\times$ गघ^२ $\times$ ज्या^{२} $\angle$ अघग + ८ अक $\times$ कग $\times$ अघ $\times$ गघ $\times$ ज्या $\angle$ अकग $\times$ ज्या $\angle$ अघग ······(१)

परञ्च सरलत्रिकोणमित्या—

अक^२ + कग^२ − २ अक $\times$ कग $\times$ कोज्या $\angle$ अकग = अघ^२ + गघ^२ − २ अघ $\times$ गघ $\times$ कोज्या $\angle$ अघग

$\therefore$ अक^२ + कग^२ − अघ^२ − गघ^२ = २ अक $\times$ कग $\times$ कोज्या $\angle$ अकग − २ अघ $\times$ गघ $\times$ कोज्या $\angle$ अघग

$\therefore$ (अक^२ + कग^२ − अघ^२ − गघ^२)^२ = (२ अक $\times$ कग $\times$ कोज्या $\angle$ अकग − २ अघ $\times$ गघ $\times$ कोज्या $\angle$ अघग)^२ ······(२)

(१) (२) समीकरणयोर्योगः

१६ च·फ^2 + (अक^2 + कग^2 − अघ^2 − गघ^2)^2 = ४ अक^2 × कग^2 + ४ अघ^2 × गघ^2 − ८ अक × कग × अघ × गघ (कोज्या ∠ अकग × कोज्या ∠ अघग − ज्या ∠ अकग × ज्या ∠ अघग)

= ४ अक^2 × कग^2 + ४ अघ^2 × गघ^2 − ८ अक × कग × अघ × गघ × कोज्या (∠क + ∠घ)। अत्र यदि ∠क + ∠घ = म, तदा

१६ च·फ^2 + (अक^2 + कग^2 − अघ^2 − गघ^2)^2 = ४ (अक^2 × कग^2 + अघ^2 × गघ^2) − ८ अक × कग × अघ × गघ × कोज्या म

= ४ (अक^2 × कग^2 + अघ^2 × गघ^2) − ८ अक × कग × अघ × गघ (२ कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$ म − १)

= ४ (अक × कग + अघ × गघ)^2 − १६ अक × कग × अघ × गघ × कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$ म

∴ १६ च फ^2 = ४ (अक × कग + अघ × गघ)^2 − (अक^2 + कग^2 − अघ^2 − गघ^2)^2 − १६ अक × कग × अघ × गघ × कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$ म

= (अक^2 + कग^2 − अघ^2 − गघ^2 + २ अक × कग + २ अघ × गघ) (अघ^2 + गघ^2 − अक^2 − कग^2 + २ अक × कग + २ अघ × गघ) − १६ अक × कग × अघ × गघ × कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$ म

= { (अक + कग)^2 − (अघ − गघ)^2 } { (अघ + गघ)^2 − (अक − कग)^2 } − १६ अक × कग × अघ × गघ × कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$ म

= (अक + कग + अघ − गघ) (अक + कग + गघ − अघ) (अघ + गघ + अक − कग) (अघ + गघ + कग − अक) − १६ अक × कग × अघ × गघ × कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$ म

अत्र यदि अक + कग + गघ + अघ = यो, ∴ अक + कग + अघ − गघ = यो − २ गघ

अक + कग + गघ − अघ = यो − २ अघ, अघ + गघ + अक − कग = यो − २ कग, अघ + गघ + कग − अक = यो − २ अक,

∴ १६ च·फ^2 = (यो − २ गघ) (यो − २ अघ) (यो − २ कग) (यो − २ अक) − १६ भुजघात × कोज्या^{2} $\frac{1}{2}$ म

$\therefore$ च·फ$^2 = \left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{गघ}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अघ}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{कग}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अक}\right) -$ भुजघात $\times$ कोज्या$^2 \frac{१}{२}$ म

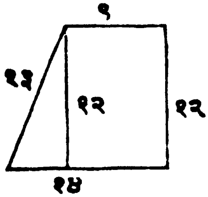
अत्र भुजानां स्थिरत्वे चतुर्भुजफलस्य तदैव परमाधिक्यं यदा "कोज्या $\frac{१}{२}$ म" अस्य मानं परमाल्पं शून्यसममर्थाद्यदा $\frac{१}{२}$ म = ९०, वा $\angle$ म = १८०° = $\angle$क + $\angle$घ, परञ्चेयं स्थितिर्वृत्तान्तर्गतचतुर्भुज एव भवितुमर्हतीत्युपपन्नं अस्फुटफलं चतुर्भुजे।

उदाहरणम्।

भूमिश्चतुर्दशमिता मुखमङ्कसङ्ख्यं
बाहू त्रयोदशदिवाकरसम्मितौ च।
लम्बोऽपि यत्र रविसंख्यक एव तत्र
क्षेत्रे फलं कथय तत् कथितं यदाद्यैः॥ १॥

जिस चतुर्भुज में आधार १४, मुख ९ दोनों भुजायें १३ और १२ हैं, एवं लम्ब भी १२ है, उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ।

न्यासः।

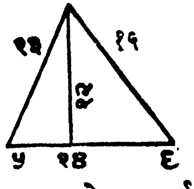


भूमिः १४। मुखं ९। बाहू १३।१२। लम्बः १२। उक्तवत्करणेन जातं क्षेत्र-फलं करणी १९८००। अस्याः पदं किञ्चिन्न्यूनमेकचत्वारिंशच्छतम् १४१।

इदमत्र क्षेत्रे न वास्तवं फलं किन्तु लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डमिति वक्ष्यमाणकरणेन वास्तवं फलम् १३८।

अत्र त्रिभुजस्य पूर्वोदाहृतस्य।

न्यासः।



भूमिः १४। भुजौ १३।१५। अनेनापि प्रकारेण त्रिबाहुके तदेव वास्तवं फलम् ८४। अत्र चतुर्भुजस्यास्पष्टमुदितम्।

उदाहरण—उपरोक्त चतुर्भुज में क्रम से ९, १२, १४ और १३ भुज हैं, तो सूत्र के अनुसार सभी भुज के योगार्ध २४ को ४ जगह रख कर उनमें

क्रम से प्रत्येक भुजा को घटाने से शेष क्रम से १५, १२, १० और ११ हुये। इनका घात १५ × १२ × १० × ११ = १९८०० का मूल १४१ से कुछ कम होता है। यह स्थूल क्षेत्रफल हुआ। इसका वास्तव फल 'लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डम्' इस सूत्र से होगा। जैसे—भूमि १४ और मुख ९ का योगार्ध $\frac{23}{2}$ को लम्ब १२ से गुणा करने पर $\frac{23}{2}$ × १२ = १३८ हुआ। इस सूत्र से त्रिभुज का फल वास्तव होता है, यह मूल में स्पष्ट है।

अथ स्थूलत्वनिरूपणार्थं सूत्रं सार्धवृत्तम्।

चतुर्भुजस्यानियतौ हि कर्णौ कथं ततोऽस्मिन्नियतं फलं स्यात्।
प्रसाधितौ तच्छ्रवणौ यदाद्यैः स्वकल्पितौ तावितरत्र न स्तः॥
तेष्वेव बाहुष्वपरौ च कर्णावनेकधा क्षेत्रफलं ततश्च।

यस्मिन् चतुर्भुजे कर्णौ अनिश्चितौ भवेतां तत्र फलमपि अनिश्चितं स्यात्। आद्यैः स्वकल्पितौ यत् श्रवणौ प्रसाधितौ तौ इतरत्र न स्तः। यतः तेषु एव बाहुषु अपरौ कर्णौ भवेतां ततः क्षेत्रफलञ्च अनेकधा भवति।

अनिश्चित कर्ण वाले चतुर्भुज का फल निश्चित कैसे हो सकता है। आद्याचार्यों ने स्वकल्पित कर्णों का साधन जो किया है, वे सब जगह नहीं हो सकते, क्यों कि उन्हीं भुजाओं पर से अनेक कर्ण और अनेक प्रकार के फल होते हैं। इस स्थिति को ग्रन्थकार नीचे मूल में स्पष्ट करते हैं।

चतुर्भुजे हि एकान्तरकोणावाक्रम्याऽन्तः प्रवेश्यमानौ भुजौ तत्संसक्तं स्वकर्णं सङ्कोचयतः। इतरौ तु बहिः प्रसरन्तौ स्वकर्णं वर्धयतः। अत उक्तं तेष्वेव बाहुष्वपरौ च कर्णाविति।

चतुर्भुज में सामने के दो कोणों को पकड़ कर भीतर की ओर दबाने से उनमें लगे हुये दोनों भुज भीतर की ओर घुसते हैं, जिससे उन कोणों में लगा हुआ कर्ण छोटा होता है, और शेष दो भुज बाहर की ओर फैलते हुये अपने कर्ण को बढ़ाते हैं इसलिये कहा गया है कि उन्हीं भुजाओं पर से अनेक कर्ण और अनेक क्षेत्रफल होते हैं।

परिशिष्ट।

किसी समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजा का मान 'अ' और उसका

आधार 'व' हो, तो भुज योगार्ध $= \frac{अ + अ + व}{२} = \left(अ + \frac{व}{२} \right)$, अतः 'सर्व दोर्युतिदलम्' इस सूत्र के अनुसार उसका क्षेत्रफल

$$= \sqrt{\left(अ+\frac{व}{२} \right) \left(अ+\frac{व}{२} - अ \right) \left(अ + \frac{व}{२} - अ \right) \left(अ+\frac{व}{२} - व \right)}$$

$$= \sqrt{\left(अ + \frac{व}{२} \right) \left(\frac{व}{२} \right) \left(\frac{व}{२} \right) \left(अ - \frac{व}{२} \right)} = \sqrt{\left(अ^२ - \frac{व^२}{४} \right) \left(\frac{व^२}{४}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(४ अ^२ - व^२ \right) \frac{व^२}{१६}} = \frac{व}{४}\sqrt{४ अ^२ - व^२} \cdots\cdots\cdots (१)$$

किसी त्रिभुज की भुजायें क्रम से 'अ' 'व' 'स' और उनका योगार्ध $= \frac{यो}{२}$ हो, तो उसका क्षेत्रफल $= \sqrt{\frac{यो}{२}\left(\frac{यो}{२} - अ\right)\left(\frac{यो}{२} - व\right)\left(\frac{यो}{२} - स\right)} \cdots (२)$

उदाहरण

(१) एक त्रिभुज की भुजायें १३, १४ और १५ फीट हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

यहाँ भुज योगार्ध $= \frac{१३+१४+१५}{२} = \frac{४२}{२} = २१$ फीट।

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \sqrt{२१ (२१ - १३) (२१ - १४) (२१ - १५)}$

$= \sqrt{२१ \times ८ \times ७ \times ६} = \sqrt{७ \times ३ \times २ \times ४ \times ७ \times ६} = \sqrt{७^२ \times ६^२ \times २^२}$

$= ७ \times ६ \times २ = ८४$ वर्ग फीट।

(२) किसी समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजा २५ गज और उसका आधार ४० गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

अब क्षेत्रफल $= \frac{व}{४}\sqrt{४ अ^२ - व^२}$, जहाँ 'अ' और 'व' समद्विबाहु त्रिभुज के क्रम से बराबर भुजा और आधार की लम्बाई है।

यहाँ अ = २५ गज और व = ४० गज।

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \frac{४०}{४}\sqrt{४ \times २५^२ - ४०^२} = १०\sqrt{५०^२ - ४०^२}$

$= १०\sqrt{२५०० - १६००} = १०\sqrt{९००} = १० \times ३० = ३००$ वर्ग गज।

(३) किसी त्रिभुज की भुजायें २५, ३९ और ५६ गज हैं, तो सबसे बड़ी भुजा के ऊपर सामने के कोण से लम्ब की लम्बाई बताओ।

यहाँ भुज योगार्ध $= \frac{२५+३९+५६}{२} = \frac{१२०}{२} = ६०$ गज।

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \sqrt{६० \times (६० - २५) (६० - ३९) (६० - ५६)}$

$= \sqrt{६० \times ३५ \times २१ \times ४} = \sqrt{५ \times ३ \times ४ \times ५ \times ७ \times ७ \times ३ \times ४}$

$$= \sqrt{५^२ \times ४^२ \times ३^२ \times ७^२} = ५ \times ४ \times ३ \times ७ = ४२०$$ वर्ग गज।

अब सबसे बड़ी भुजा ५६ गज है अतः उस पर सामने के कोण से लम्ब

$$= \frac{२\ \text{क्षेफ}}{\text{भू}} = \frac{२ \times ४२०}{५६} = १५$$ गज।

अभ्यासार्थ प्रश्न।

त्रिभुजों के क्षेत्रफल बताओ, जिनकी भुजायें निम्न लिखित हैं।

(१) ४, ६ और ८ फीट, (२) २५, २५ और १४ गज, (३) ७८, ८४ और ९० गज, (४) १०, १० और १६ इञ्च, (५) २ फी० २ इञ्च, २ फी० १ इञ्च और १ फीट ५ इञ्च।

(६) किसी त्रिभुज की भुजायें ६८, ७५ और ७७ फीट हैं, तो ६८ फीट वाली भुजा के ऊपर सामने के कोण से लम्ब का मान बताओ।

(७) किसी त्रिभुज की दो भुजायें ८५ गज और १५४ गज हैं। यदि उसका भुज योग ३२४ गज हो, तो क्षेत्रफल बताओ।

(८) एक त्रिभुज की भुजायें क्रम से १७ गज, १७ गज १ फीट और १७ गज २ फीट हैं, तो १७ गज १ फीट वाली भुजा के ऊपर सामने के कोण से खींचे गये लम्ब का मान बताओ।

(९) किसी त्रिभुजाकार खेत की भुजायें क्रम से १४३ गज, ४०७ गज और ४४० गज हैं, तो प्रति वर्ग गज १० शिलिङ्ग की दर से उसका लगान बताओ।

(१०) एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ जिसकी बराबर भुजायें १५ फीट और आधार १८ फीट है।

(११) किसी त्रिभुज की भुजायें क्रम से ३५, ३९ और ५६ गज हैं, तो उन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बताओ, जो ५६ गज वाली भुजा के ऊपर सामने के कोण से लम्ब करने पर बनते हैं।

विशेष—'सर्व दोर्युतिदलं चतुःस्थितं' इस सूत्र के अनुसार त्रिभुज तथा वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज का क्षेत्रफल वास्तव आता है, अन्य चतुर्भुज का इस सूत्र से स्थूल फल आता है, यह उपपत्ति से स्पष्ट है, अतः वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज के क्षेत्रफल के कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

यदि वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से अ, क, ग और घ हो तथा उनका योग = यो, तो उसका क्षेत्रफल

$$=\sqrt{\left(\frac{\text{यो}}{२}-\text{अ}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२}-\text{क}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२}-\text{ग}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२}-\text{घ}\right)}\cdots\cdots(१)$$

उदाहरण

(१) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से २५, ३९, ६० और ५२ गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

यहाँ भुजयोग = २५+३९+६०+५२ = १७६ गज। $\therefore \frac{\text{यो}}{२}$ = ८८ गज।

$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{(८८-२५)(८८-३९)(८८-६०)(८८-५२)}\ \text{व॰ ग॰}$$
$$=\sqrt{६३\times४९\times२८\times३६}=\sqrt{९\times७\times४९\times७\times४\times३६}$$
$$=\sqrt{३^२\times७^२\times७^२\times२^२\times६^२}=३\times७\times७\times२\times६$$
$$=४९\times३६=१७६४\ \text{व॰ गज।}$$

(२) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें ५०, ६० ८० और ८६ इञ्च हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

$$\text{यहाँ भुजयोगार्धं} = \frac{\text{यो}}{२} = \frac{५०+६०+८०+८६}{२} = \frac{२७६}{२} = १३८\ \text{इञ्च।}$$
$$\therefore \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \sqrt{(१३८-५०)(१३८-६०)(१३८-८०)(१३८-८६)}\ \text{व॰ इ॰}$$
$$=\sqrt{८८\times७८\times५८\times५२}=\sqrt{११\times८\times२६\times३\times२९\times२\times२६\times२}\ \text{व॰ इ॰}$$
$$=\sqrt{११\times४\times२\times२६\times२६\times४\times२९\times३}$$
$$=\sqrt{२६^२\times४^२\times६६\times२९}\ \text{व॰ इ॰}$$
$$=२६\times४\sqrt{१९१४}=१०४\sqrt{१९१४}\ \text{वर्ग इञ्च।}$$

अभ्यासार्थ प्रश्न।

(१) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से ७५, ७५, १०० और १०० गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(२) एक वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से १ फीट ३ इञ्च, ११ इञ्च १ फीट और ८ इञ्च हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(३) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से ७, ८, ९ और १२ गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(४) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से ४५, ४८ ५० और ५३ हुई हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(५) एक वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से ४०, ५०, ६० और ७० गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(६) किसी वृत्तान्तर्गत चतुर्भुज की भुजायें क्रम से २०, २५, ३० और ३५ हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

लम्बयोः कर्णयोर्वैकमनिर्दिश्यापरं कथम्।
पृच्छत्यनियतत्वेऽपि नियतं चापि तत्फलम्॥
स प्रच्छकः पिशाचो वा वक्ता वा नितरां ततः।
यो न वेत्ति चतुर्बाहुक्षेत्रस्यानियतां स्थितिम्॥

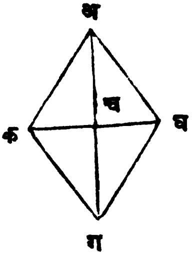
दोनों लम्ब में से एक को या दोनों कर्ण में से एक को नहीं कहकर क्षेत्र की अनिश्चित स्थिति में भी जो उसका निश्चित फल पूछता है, वह पूछने वाला मूर्ख है और उस पूछने वाले से भी उत्तर देने वाला अधिक मूर्ख है, जो चतुर्भुज की अनिश्चित स्थिति को नहीं जानता है।

समचतुर्भुजायतयोः फलानयने करणसूत्रं सार्धश्लोकद्वयम्।
इष्टा श्रुतिस्तुल्यचतुर्भुजस्य कल्प्याऽथ तद्वर्गविवर्जिता या॥२१॥
चतुर्गुणा बाहुकृतिस्तदीयं मूलं द्वितीयश्रवणप्रमाणम्।
अतुल्यकर्णाभिहतिर्द्विभक्ता फलं स्फुटं तुल्यचतुर्भुजे स्यात्॥२२॥
समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे च तथाऽऽयते तद्भुजकोटिघातः।
चतुर्भुजेऽन्यत्र समानलम्बे लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डम्॥२३॥

तुल्यचतुर्भुजस्य इष्टा श्रुतिः कल्प्या, अथ तद्वर्गविवर्जिता या चतुर्गुणा बाहुकृतिः तदीयं मूलं द्वितीयश्रवणप्रमाणं भवेत्। अतुल्यकर्णाभिहतिः द्विभक्ता तुल्यचतुर्भुजे स्फुटं फलं स्यात्। समश्रुतौ तुल्यचतुर्भुजे तथा आयते च तद्भुजकोटिघातः फलं स्यात्। अन्यत्र समानलम्बे चतुर्भुजे कुमुखैक्यखण्डं लम्बेन निघ्नं फलं स्यात्।

तुल्य चतुर्भुज में अपनी इच्छानुसार एक कर्ण का मान कल्पना कर उसके वर्ग को चतुर्गुणित भुजवर्ग में घटाकर शेष का वर्गमूल लेने से दूसरे कर्ण का मान होता है। उन दोनों असमान कर्णों के घात का आधा तुल्य चतुर्भुज अर्थात् विषमकोण समचतुर्भुज में वास्तव फल होता है। समान दोनों कर्णवाले तुल्यचतुर्भुज अर्थात् वर्गक्षेत्र में और आयत में भुज और कोटि के गुणनफल-तुल्य क्षेत्रफल होता है। अन्यत्र समान लम्ब वाले विषम चतुर्भुज में भूमि और मुख के योगार्ध को लम्ब से गुणा करने पर क्षेत्रफल होता है।

उपपत्तिः—कल्प्यते अ क ग घ समचतुर्भुजं, यस्य अ ग, क घ कर्णावतुल्यौ। अत्र कर्णरेखया चतुर्भुजमर्धितं भवति तथा कर्णौ परस्परं लम्बौ स्तः इति क्षेत्रमित्या स्पष्टं तेन अ क च त्रिभुजे



$$\text{क च} = \sqrt{\text{अ क}^2 - \text{अ च}^2} = \sqrt{\text{भु}^2 - \left(\frac{\text{अ ग}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\text{भु}^2 - \frac{\text{अ ग}^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\text{भु}^2 - \text{प्र क}^2}{4}} \text{ ।}$$

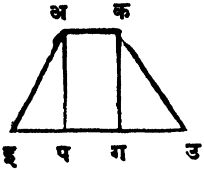
$$\text{परञ्च क च} = \frac{\text{क घ}}{2} = \frac{\text{द्वि क}}{2} \text{ ।}$$

$$\therefore \frac{\text{द्वि० क}}{2} = \sqrt{\frac{4\text{ भु}^2 - \text{प्र० क}^2}{4}} = \frac{\sqrt{4\text{ भु}^2 - \text{प्र० क}^2}}{2}$$

$\therefore \text{द्वि० क} = \sqrt{4\text{ भु}^2 - \text{प्र० क}^2}$ । अथ अ क ग घ चतुर्भुजफलम् $=$

$$\triangle\text{अ क घ} + \triangle\text{क ग घ} = 2\,\triangle\text{अ क घ} = \frac{2 \times \text{अ च} \times \text{क घ}}{2} = \text{अ च} \times \text{क घ}$$

$= \frac{\text{अ ग}}{2} \times \text{क घ} = \frac{\text{प्र० क} \times \text{द्वि० क}}{2}$ अत उपपन्नमतुल्यकर्णाभिहतिरित्यादि। एवं वर्गक्षेत्रे आयते च भुजकोटिघातः फलं भवतीति स्पष्टमेव रेखागणित विदाम्। अथ कल्प्यते अ इ उ क समलम्बचतुर्भुजम्। अत्र अ प क ग लम्बौ समौ। अ इ उ क समलम्ब चतुर्भुजफलम् $= \triangle\text{अ इ प}$



$$+ \square\text{अ प ग क} + \triangle\text{क ग उ} = \frac{\text{अ प} \times \text{इ प}}{2} + \text{अ क} \times \text{अ प} + \frac{\text{क ग} \times \text{ग उ}}{2} = \frac{\text{अ प}}{2}(\text{इ प} + 2\text{ अ क} + \text{ग उ})$$

$$= \frac{\text{अ प}}{2}(\text{इ प} + \text{अ क} + \text{प ग} + \text{ग उ}) = \frac{\text{अ प}}{2}(\text{इ उ} + \text{अ क}) = \frac{\text{लम्ब}}{2}$$

$(\text{मु} + \text{भू})$ अत उपपन्नं सर्वम्।

अत्रोद्देशकः ॥

क्षेत्रस्य पञ्चकृतितुल्यचतुर्भुजस्य कर्णौ ततश्च गणितं गणक प्रचक्ष्व ।
तुल्यश्रुतेश्च खलु तस्य तथाऽऽयतस्य यद्विस्तृती रसमिताऽष्टमितश्च दैर्घ्यम् ॥

जिस विषमकोण समचतुर्भुज की भुजा २५ है, उसका दोनों कर्ण और क्षेत्रफल बताओ, एवं उक्त भुजवाले वर्गक्षेत्र और जिस आयत के भुज ६ और कोटि ८ हैं, उसका क्षेत्रफल बताओ ।

प्रथमोदाहरणे—

न्यासः । भुजाः २५ । २५ । २५ । २५ । अत्र त्रिंशन्मितामेकां ३० श्रुतिं प्रकल्प्य यथोक्तकरणेन जाताऽन्या श्रुतिः ४० । फलञ्च ६०० ।

अथवा ।

न्यासः । चतुर्दशमितामेकां १४ श्रुतिं प्रकल्प्योक्तवत्करणेन जाताऽन्या श्रुतिः ४८ । फलञ्च ३३६ ।

द्वितीयोदाहरणे—

तत्कृत्योर्योगपदं कर्ण इति जाता करणीगता श्रुतिरुभयत्र तुल्यैव १२५० । गणितञ्च ६२५ ।

अथायतस्य—

न्यासः । विस्तृतिः ६ । दैर्घ्यम् ८ । अस्य गणितं ४८ ।

उदाहरण—उक्त विषमकोण समचतुर्भुज का एक कर्ण ३० कल्पना कर उसके वर्ग ९०० को चतुर्गुणित भुजवर्ग $(४ \times २५^२) = ४ \times ६२५ = २५००$ में घटाकर शेष $(२५०० - ९००) = १६००$ का मूल ४० दूसरा कर्ण हुआ । अब दोनों कर्णों के घात का आधा करने पर $\frac{३० \times ४०}{२} = ६००$ क्षेत्रफल हुआ । इसी तरह १४ एक कर्ण का मान कल्पनाकर उक्त रीति से दूसरा कर्ण ४८ और फल ३३६ होता है । २५ भुजवाले वर्गक्षेत्र का कर्ण जानने के लिये दो भुजाओं का वर्गयोग का मूल लेने से $= \sqrt{२५^२ + २५^२} = \sqrt{६२५ + ६२५} = \sqrt{१२५०}$ $२५\sqrt{२}$ कर्ण हुआ । अब भुजकोटि का घात करने से $२५ \times २५ = ६२५$ क्षेत्रफल हुआ । इसी तरह आयत का फल $= ६ \times ८ = ४८$ क्षेत्रफल हुआ ।

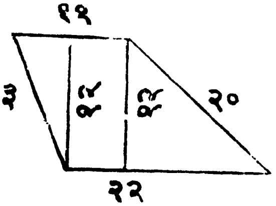
उदाहरणम् ।

क्षेत्रस्य यस्य वदनं मदनारितुल्यं
विश्वम्भरा द्विगुणितेन मुखेन तुल्या ।

बाहू त्रयोदशनखप्रमितौ च लम्बः।
सूर्य्योन्मितश्च गणितं वद तत्र किं स्यात् ॥ २ ॥

जिस समलम्ब चतुर्भुज का मुख ११, आधार (भूमि) २२, शेष दोनों भुजायें क्रम से १३ और २० तथा लम्ब १२ हैं उसका क्षेत्रफल बताओ।

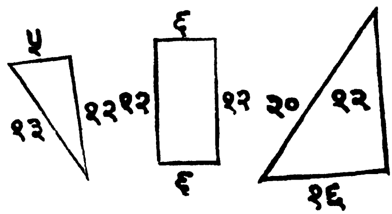
न्यासः।



वदनम् ११। विश्वम्भरा२२। बाहू १३। २०। लम्बः १२। अथ सर्वदोर्युतिदलमित्यादिना स्थूलफलं २५०। वास्तवन्तु लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डमिति जातं फलम्। १९८। क्षेत्रस्य खण्डत्रयं कृत्वा फलानि पृथगानीय ऐक्यं कृत्वाऽस्य फलोपपत्तिर्दर्शनीया।

खण्डत्रयदर्शनम्—

न्यासः।



प्रथमस्य भुजकोटिकर्णाः ५। १२। १३ द्वितीयस्यायतस्य विस्तृतिः ६। दैर्घ्यम् १२। तृतीयस्य भुजकोटिकर्णाः १६। १२। २०। अत्र त्रिभुजयोः क्षेत्रयोर्भुजकोटिघातार्धं फलम्। आयते चतुरस्रे क्षेत्रे तद्भुजकोटिघातः फलम्। यथा प्रथमक्षेत्रे फलम् ३०। द्वितीये ७२। तृतीये ९६। एषामैक्यं सर्वक्षेत्रे फलम्। १९८।

उदाहरण—यहाँ 'सर्वदोर्युतिदलं' इस सूत्र के अनुसार उक्त समलम्ब चतुर्भुज का स्थूलक्षेत्रफल = २५० और 'लम्बेन निघ्नं कुमुखैक्यखण्डं' इस सूत्र के अनुसार वास्तवफल = $\frac{१२(२२+११)}{२}$ = ६ × ३३ = १९८। अथवा—उक्त समलम्ब चतुर्भुज को तीन भागों में बाँटने से पहले जात्यत्रिभुज की भुजायें ५।१२।१३ दूसरे आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १२ और ६ तथा

तीसरे जात्यत्रिभुज की भुजायें १२।१६।२० हैं। इन तीनों टुकड़ों के क्षेत्रफलों का योग $\frac{५ \times १२}{२} + १२ \times ६ + \frac{१२ \times १६}{२} = ३० + ७२ + ९६ = १९८$ = समलम्ब चतुर्भुज का फल।

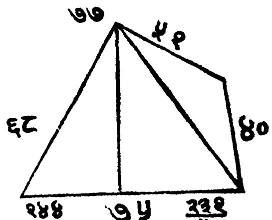
अथान्यदुदाहरणम्।

पञ्चाशदेकसहिता वदनं यदीयं
भूः पञ्चसप्ततिमिता प्रमितोऽष्टषष्ट्या।
सव्यो भुजो द्विगुणविंशतिसम्मितोऽन्य-
स्तस्मिन् फलं श्रवणलम्बमिती प्रचक्ष्व ॥ ३ ॥

जिस चतुर्भुज का मुख ५१ भूमि ७५ एवं प्रथम भुज ६८ और द्वितीय भुज ४० हैं, तो उसका क्षेत्रफल, कर्ण और लम्ब के मान बताओ। यहाँ लम्ब और कर्ण दोनों अज्ञात हैं, अतः इसका फल निश्चित नहीं होगा। दोनों में किसी एक का मान कल्पना कर दूसरा निकाला जा सकता है, जो आगे स्वयं ग्रन्थकार दिखलाये हैं।

वदनम् ५१। भूमिः ७५।
भुजौ ६८। ४०

न्यासः



अत्र फलावलम्बश्रुतीनां सूत्रं वृत्तार्द्धम्।

ज्ञातेऽवलम्बे श्रवणः श्रुतौ तु लम्बः फलं स्यान्नियतं तु तत्र।

कर्णस्यानियतत्वाल्लम्बोऽप्यनियत इत्यर्थः ॥

लम्ब के ज्ञान रहने पर कर्ण मालूम होता है, एवं कर्ण के ज्ञान से लम्ब का ज्ञान होता है, और वहाँ फल भी निश्चित होता है।

लम्बज्ञानाय करणसूत्र वृत्तार्द्धम्।

चतुर्भुजान्तस्त्रिभुजेऽवलम्बः प्राग्वद्भुजौ कर्णभुजौ मही भूः ॥२४॥

चतुर्भुज के अन्तर्गत त्रिभुज में कर्ण और एक भुज को भुज तथा आधार को भूमि मानकर 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस रीति से लम्ब का ज्ञान करना चाहिये।

अत्र लम्बज्ञानार्थं सव्यभुजाग्राद्दक्षिणभुजमूलगामी इष्टकर्णः सप्तसप्ततिमितः ७७ कल्पितस्तेन चतुर्भुजान्तस्त्रिभुजं कल्पितम्। तत्रासौ कर्ण एको भुजः ७७। द्वितीयस्तु सव्यभुजः ६८। भूः सैव ७५। अत्र प्राग्वल्लब्धो लम्बः $\frac{३०८}{५}$।

उदाहरण—यहाँ कर्ण का मान ७७ माना। अब चतुर्भुज के भीतर के त्रिभुज की भुजायें ६८ और ७७ तथा भूमि ७५ हुये, तो 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इत्यादि रीति से लम्ब का मान $\frac{३०८}{५}$ आया।

लम्बे ज्ञाते कर्णज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तम्

यल्लम्बलम्बाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं कथिताऽबधा सा।
तदूनभूवर्गसमन्वितस्य यल्लम्बवर्गस्य पदं स कर्णः ॥२५॥

लम्बलम्बाश्रितबाहुवर्गविश्लेषमूलं यत् सा अबधा कथिता। तदूनभूवर्गसमन्वितस्य लम्बवर्गस्य यत् पदं स कर्णः स्यात्।

लम्ब और लम्बाश्रित जो भुज, उन दोनों का वर्गान्तरमूल आबाधा होती है। आबाधा और भूमि के अन्तर वर्ग में लम्ब-वर्ग जोड़कर मूल लेने से कर्ण होता है।

अस्योपपत्तिस्तु पूर्वोक्तचतुर्भुजक्षेत्रविन्यासेन स्पष्टा।

अत्र सव्यभुजाग्राल्लम्बः किल कल्पितः $\frac{३०८}{५}$।

अतो जाताऽऽबाधा $\frac{१४४}{५}$।

तदूनभूवर्गसमन्वितस्येत्यादिना जातः कर्णः ७७।

उदाहरण—उक्त चतुर्भुज में लम्ब $\frac{३०८}{५}$ है और लम्बाश्रित भुज ६८ है, तो सूत्र के अनुसार $\sqrt{भु^२ - लम्ब^२} = \sqrt{६८^२ - \left(\frac{३०८}{५}\right)^२}$

$$= \sqrt{४६२४ - \frac{९४८६४}{२५}} \sqrt{\frac{११५६०० - ९४८६४}{२५}} = \sqrt{\frac{२०७३६}{२५}}$$

$= \frac{१४४}{५}$ आबाधा। इसको भूमि ७५ में घटा कर शेष $\frac{२३१}{५}$ के वर्ग $\frac{५३३६१}{२५}$ में लम्ब वर्ग $\frac{९४८६४}{२५}$ को जोड़ कर मूल लेने से ७७ कर्ण हुआ।

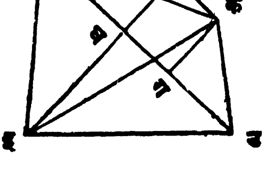
द्वितीयकर्णज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तद्वयम्।

इष्टोऽत्र कर्णः प्रथमं प्रकल्प्यस्त्र्यस्रे तु कर्णोभयतः स्थिते ये।
कर्णं तयोः क्ष्मामितरौ च बाहू प्रकल्प्य लम्बावबधे च साध्ये॥
आबाधयोरेककुप्स्थयोर्यत् स्यादन्तरं तत्कृतिसंयुतस्य।
लम्बैक्यवर्गस्य पदं द्वितीयः कर्णो भवेत्सर्वचतुर्भुजेषु॥ २७॥

अत्र प्रथमम् इष्टः कर्णः प्रकल्प्यः तु कर्णोभयतः स्थिते ये त्र्यस्रे तयोः कर्णं क्ष्माम्, इतरौ च बाहू प्रकल्प्य लम्बावबधे च साध्ये। एककुप्स्थयोः आबाधयोः अन्तरं यत् स्यात् तत्कृतिसंयुतस्य लम्बैक्यवर्गस्य पदं सर्वचतुर्भुजेषु द्वितीयः कर्णः भवेत्।

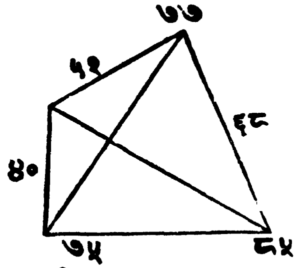
चतुर्भुज में (कोई कर्ण ज्ञात हो, तो उसके या कर्ण ज्ञात न हो, तो) इष्ट कर्ण कल्पना कर उसके दोनों तरफ के त्रिभुजों में कर्ण को भूमि और उसके आश्रित भुजों को भुज मान कर 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस सूत्र से लम्ब और आबाधा के मान जानना चाहिये। एक तरफ की आबाधाओं के अन्तरवर्ग में दोनों लम्ब के योग के वर्ग को जोड़ कर मूल लेने पर सभी चतुर्भुज में दूसरा कर्ण होता है।

उपपत्तिः—अत्र अ इ उ क चतुर्भुजे अ उ कर्णकल्पनेन अइउ, अकउ त्रिभुजयोः पूर्वोक्तरीत्या लम्बावबधे साध्ये। अ उ कर्णोपरि इ क बिन्दुभ्यां क्रमेण



इ घ-क ग लम्बौ प्रथमद्वितीयाख्यौ। इ घ रेखा घ दिशि संवर्ध्य तदुपरि क बिन्दोः क च लम्बः कार्यस्तेन क ग=घ च, ∵ इ घ + घ च=द्वि· ल + प्र· ल। अ ग − अ घ=घ ग=च क=एकदिक्स्थाबाधान्तरम्। ∴ इ क = $\sqrt{\text{इ च}^2 + \text{क च}^2}$ = $\sqrt{\text{लं· यो}^2 + \text{आ· अं}^2}$ = द्वि· कर्ण अत उपपन्नम्।

न्यासः—



तत्र चतुर्भुजे सम्बभुजाभ्यां दक्षिणभुजमूलगामिनः कर्णस्य मानं कल्पितम् ७७। तत्कर्णरेखावच्छिन्नस्य क्षेत्रस्य मध्ये कर्णरेखोभयतो ये त्र्यस्रे उत्पन्ने तयोः कर्णं भूमिं तदितरौ च भुजौ प्रकल्प्य प्राग्वल्लम्बः आबाधा च साधिता। तद्दर्शनम्। लम्बः ६०। द्वितीयलम्बः २४। आबाधयो ४५। ३२। रेककुप्स्थयोरन्तरस्य १३ कृते १६९। लम्बैक्य ८४। कृतेश्च ७०५६। योगः ७२२५। तस्य पदं द्वितीयकर्णप्रमाणम् ८५।

उदाहरण—उक्त चतुर्भुज में ६८ और ७५ को भुज तथा ७७ कर्ण को भूमि मानकर 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस सूत्र के अनुसार बड़ी आबाधा ४५ और छोटी आबाधा ३२ एवं लम्ब ६० हुए। इसी तरह ५१ और ४० को भुज एवं ७७ कर्ण को भूमि मानकर उक्त रीति से आबाधा और लम्ब क्रम से ४५, ३२ और २४ होते हैं। 'अ ब एक तरफ की आबाधाओं का अन्तर १३ के वर्ग १६९ में लम्बयोग ८४ का वर्ग ७०५६ को जोड़ कर ७२२५ का मूल ८५ दूसरा कर्ण हुआ।

अत्रेष्टकर्णकल्पने विशेषोक्तिसूत्रं सार्द्धवृत्तम्।

कर्णाश्रितं स्वल्पभुजैक्यमुर्वीं प्रकल्प्य तच्छेषमितौ च बाहू।
साध्योऽवलम्बोऽथ तथाऽन्यकर्णः स्वोर्व्याः कथञ्चिच्छ्रवणो न दीर्घः॥
तदन्यलम्बान्न लघुस्तथेदं ज्ञात्वेष्टकर्णः सुधिया प्रकल्प्यः।

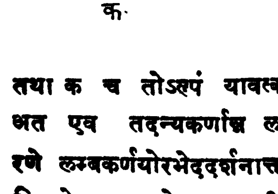
कर्णाश्रितं स्वल्पभुजैक्यम् उर्वीं प्रकल्प्य, तच्छेषमितौ च बाहू प्रकल्प्य, अवलम्बः तथा अन्यकर्णः साध्यः, श्रवणः स्वोर्व्याः कथंचित् दीर्घः न स्यात् तथा अन्यलम्बात् लघुः न स्यात्, इदं ज्ञात्वा इष्टकर्णः सुधिया प्रकल्प्यः।

कर्ण के दोनों बगल में रहने वाले जिन दो भुजों का योग अल्प हो उसको भूमि और शेष भुजों को भुज मानकर 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस सूत्र से लम्ब तथा 'इष्टोऽत्र कर्णः' इस सूत्र से अन्य कर्ण साधन करना चाहिये। इष्ट कर्ण की कल्पना इस तरह करनी चाहिये कि वह भूमि से अधिक और

अन्य लम्ब से छोटा न हो। ग्रन्थकार के उदाहरण और इसी तरह के अन्य उदाहरण में (जहाँ दोनों कर्ण परस्पर लम्ब हों), लम्ब से इष्ट कर्ण को बड़ा होना ठीक है, किन्तु अन्य जगहों में इष्ट कर्ण का मान अन्य कर्ण से अल्प नहीं होना चाहिये। ग्रन्थकार के उदाहरण में लम्ब और कर्ण एक ही है, अतः 'तदन्यलम्बान्न लघुः' यह पाठ ठीक है। अन्य उदाहरण में 'तदन्यकर्णान्न लघुः' ऐसा पाठ समझना चाहिये। 'तदन्यलम्बान्न लघुः' इसकी पुष्टि ग्रन्थकार ने की है जो नीचे स्पष्ट है।

चतुर्भुजे हि एकान्तरकोणावाक्रम्य सङ्कोच्यमानं त्रिभुजत्वं याति तत्रैककोणलग्नलघुभुजयोरैक्यं भूमिमितरौ भुजौ प्रकल्प्य साधितः स च लम्बादूनः सङ्कोच्य मानः कर्णः कथञ्चिदपि न स्यात्। तदितरो भूमेरधिको न स्यादेवमुभयथाऽपि बुद्धिमता ज्ञायते।

उपपत्तिः—अथ यदि विषमचतुर्भुजस्यैकान्तरकोणावाक्रम्यते तदा त्रिभुजत्वं स्यात्तेनोक्तचतुर्भुजं त्रिभुजाकारं जातं यथा—अ क घ त्रिभुजं, यत्र



संयुक्तकर्णः = क च, अन्यलम्बः = क ल। अत्र, अन्यकर्णज्ञानाय 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इत्यादिना अल आबाधां प्रसाध्य ततः अ च − अ ल = ल च = भुजः, क ल = लम्बः = कोटिः।

$\because$ $\sqrt{\text{क ल}^2 + \text{ल च}^2}$ = क च = अन्य कर्णः। अयमतिलघुस्तेन क च तोऽधिके कर्णमाने चतुर्भुजत्वं स्यात्। अत्र यदि कल तोऽधिकं तथा क च तोऽल्पं यावत्कर्णमानं कल्प्यते तावत् अ क घ त्रिभुजत्वमेव, अत एव तदन्यकर्णान्न लघुरिति पाठः साधुः। परञ्च भास्करोक्तोदाहरणे लम्बकर्णयोरभेददर्शनात्तदन्यलम्बान्न लघुरित्यपि पाठः समीचीनः। अथ त्रिभुजे भुजद्वययोगस्य तृतीयभुजादधिकत्वाद्भुजद्वययोगरूपाया उर्व्यास्तृतीयभुजरूपः कर्णः कथमपि महान्न भवेदत उपपन्नं सर्वम्।

विषमचतुर्भुजफलानयनाय करणसूत्रं वृत्तार्द्धम्।

त्र्यस्रे तु कर्णोभयतः स्थिते ये
तयोः फलैक्यं फलमत्र नूनम् ॥ २९ ॥

कर्णोभयतः स्थिते ये त्र्यस्रे तयोः फलैक्यम् अत्र नूनं फलं स्यात् ।

विषम चतुर्भुज में कर्ण के दोनों तरफ के त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग करने से क्षेत्रफल होता है ।

उपपत्तिः—कर्णरेखया विभक्तस्य विषमचतुर्भुजस्य फलं खण्डद्वयरूपयोस्त्रि-भुजयोः क्षेत्रफलयोगसमं भवतीति किं चित्रम् ।

अनन्तरोक्तक्षेत्रान्तस्त्र्यस्रयोः फले । ९२४।२३१० ।

अनयोरैक्यं ३२३४ तस्य फलम् ।

उदाहरण—पूर्वोक्त चतुर्भुज में भूम्यर्ध $\frac{७७}{२}$ को लम्ब २४ से गुणा करने पर ७७ × १२ = ९२४ प्रथम त्रिभुज का फल हुआ और उसी भूम्यर्ध को लम्ब ६० से गुणा करने पर $\frac{७७}{२}$ × ६० = ७७ × ३० = २३१० हुआ । दोनों का योग = ९२४ + २३१० = ३२३४ विषम चतुर्भुज का फल हुआ ।

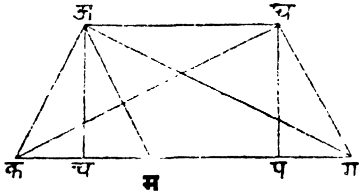
समानलम्बस्याबाधादिज्ञानाय करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

समानलम्बस्य चतुर्भुजस्य मुखोनभूमिं परिकल्प्य भूमिम् ।
भुजौ भुजौ त्र्यस्रवदेव साध्ये तस्याबधे लम्बमितिस्ततश्च ॥३०॥
आबाधयोना चतुरस्रभूमिस्तल्लम्बवर्गैक्यपदं श्रुतिः स्यात् ।
समानलम्बे लघुदोः कुयोगान्मुखान्यदोः संयुतिरल्पिका स्यात् ॥

समानलम्बस्य चतुर्भुजस्य मुखोनभूमिं भूमिं परिकल्प्य भुजौ भुजौ परि-कल्प्य तस्य अबधे त्र्यस्रवत् एव साध्ये ततः लम्बमितिः च साध्या । आबाध-योना चतुरस्रभूमिः या तल्लम्बवर्गैक्यपदं श्रुतिः स्यात् । समानलम्बे (चतुर्भुजे) लघुदोः कुयोगात् मुखान्यदोः संयुतिः अल्पिका स्यात् ।

समान लम्ब वाले चतुर्भुज की भूमि में मुख घटा कर भूमि और दोनों भुजों को भुज मान कर उसकी आबाधायें और लम्ब 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इत्यादि सूत्र के अनुसार साधन करें । चतुर्भुज की भूमि में आबाधा को घटा कर शेष और लम्ब का वर्ग योग मूल कर्ण होता है । समलम्ब चतुर्भुज में लघु भुज और भूमि के योग से मुख और अन्यभुज का योग अल्प होता है ।

उपपत्तिः—कल्प्यते अ क ग घ चतुर्भुजे अ च घ प लम्बौ समौ, तेन अ घ क ग रेखे समानान्तरे। अतः क ग − अ घ = क ग − च प = क च + प ग, तेन अ च रेखोपरि घ प रेखां संयोज्य स्थापनेन अ क च, घ प ग त्रिभुज-योर्योगरूपे अ क म त्रिभुजे अ क, प ग भुजौ चतुर्भुजस्य भुजतुल्यौ तथा अ च लम्बोऽपि तल्लम्ब एव, क च, प ग



आबाधे, अतः क ग − क च = च ग, $\sqrt{\text{च ग}^2 + \text{अ च}^2}$ = अ ग = प्रकर्णः। एवं क ग − प ग = क प। $\sqrt{\text{क प}^2 + \text{घ प}^2}$ = क घ = द्वि· क·, एतेनाबाध-योना चतुरस्रभूमिरित्याद्युपपन्नम्।

अथ घ ग समानान्तरा अ विन्दोः अ म रेखा कार्या। ∵ अ च < अ क, अ म = घ ग तथा अ घ = म प। अ म + क म > अ क, वा घ ग + क म > अ क पक्षयोः अ घ संयोजनेन, घ ग + क म + अ घ > अ क + अ घ,

वा घ ग + क म + म ग > अ क + अ घ।

∴ घ ग + क ग > अ क + अ घ, ∴ ल· भु + भूमि > अ· भु + मुख

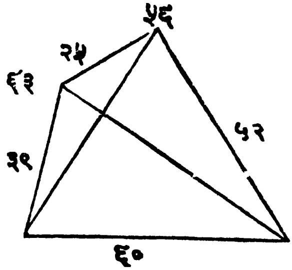
अत उपपन्नम्।

उदाहरणम्।

द्विपञ्चाशन्मितव्येकचत्वारिंशन्मितौ भुजौ।
मुखं तु पञ्चविंशत्या तुल्यं षष्ट्या मही किल ॥ १ ॥
अतुल्यलम्बकं क्षेत्रमिदं पूर्वैरुदाहृतम्।
षट्पञ्चाशत् त्रिषष्टिश्च नियते कर्णयोर्मिती।
कर्णौ तत्रापरौ ब्रूहि समलम्बं च तच्छ्रुती ॥ २ ॥

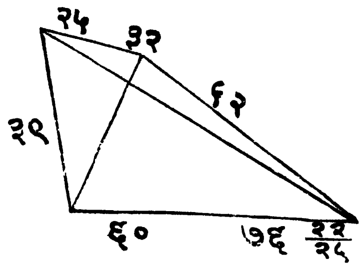
जिस चतुर्भुज में प्रथम भुज = ५२, द्वितीय भुज = ३९ मुख = २५ और भूमि = ६० हैं। इसके निश्चित कर्ण मान ५६ और ६३ हैं, तो अन्य कर्णों के मान बताओ। इस क्षेत्र को पूर्वाचार्यों ने अतुल्य लम्बक क्षेत्र कहा है। यदि यह चतुर्भुज समलम्बक हो, तो लम्ब और दोनों कर्ण बताओ।

न्यासः । अत्र बृहत्कर्णं त्रिषष्टिमितं प्रकल्प्य जातः प्राग्वदन्यः कर्णः ५६ । अथ षट्पञ्चाशत्स्थाने द्वात्रिंशन्मितं कर्णं ३२ प्रकल्प्य प्राग्वत्साध्यमाने कर्णे ।



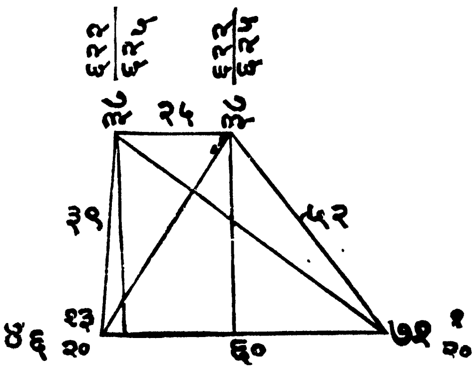
न्यासः ।

जातं करणीखण्डद्वयं ६२१ । २७०० । अनयोर्मूलयो २४$\frac{२२}{२८}$ । ५१$\frac{३४}{२८}$ । रैक्यं द्वितीयः कर्णः ७६$\frac{२२}{२८}$ ।



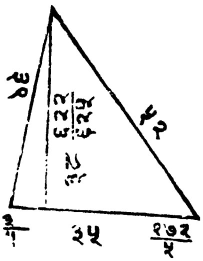
अथ तदेव क्षेत्रं चेत्समलम्बम् ।

न्यासः ।



तदा मुखोनभूमिं परिकल्प्य भूमिमितिज्ञानार्थं त्र्यस्रं कल्पितम् ।

न्यासः।



अत्राबाधे जाते $\frac{३}{५}$। $\frac{१७३}{५}$। लम्बश्च करणीगतो जातः $\frac{३८०१६}{२५}$ आसन्नमूलकरणेन जातः $३८\frac{६२३}{६२५}$ अयं तत्र चतुर्भुजे समलम्बः लब्धाऽबाधोनितभूमेः समलम्बस्य च वर्गयोगः ५०४१ अयं कर्णवर्गः। एवं बृहदाबाधातो द्वितीयकर्णवर्गः २१७६। अनयोरासन्नमूलकरणेन जातौ कर्णौ $७१\frac{१}{२०}$। $४६\frac{१३}{२०}$। एवं चतुरस्रे तेष्वेव बाहुष्वन्यौ कर्णौ बहुधा भवतः।

उदाहरण—उक्त चतुर्भुज में दोनों भुज ३९ और ५२ हैं। मुख २५ और भूमि ६० हैं। यहाँ बड़े कर्ण ६३ को इष्ट कर्ण और उस कर्ण में लगी हुई भुजायें ५२ और २५ को भुज मान कर 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस सूत्र के अनुसार प्रथम आबाधा १५, द्वितीयाबाधा ४८ और लम्ब २० हुए। इसी तरह ३९ और ६० भुजों को भुज मान कर उक्त रीति से दोनों आबाधायें १५।४८ और लम्ब = ३६ हुए।

अब एक दिशा की दोनों आबाधाओं का अन्तर शून्य के वर्ग में लम्बैक्य (२० + ३६) वर्ग = $५६^{२}$ जोड़ कर मूल लेने से ५६ दूसरा कर्ण हुआ।

अब ५६ के स्थान में ३२ कर्ण को भूमि और २५ तथा ३९ को भुज मान कर उक्त रीति से आबाधायें २ और ३० हुईं। इस पर से लम्ब $\sqrt{६२१}$ हुआ। इसका वास्तव मूल नहीं आता है, अतः २५ महान् इष्ट मान कर 'वर्गेण महतेष्टेन' इस सूत्र के अनुसार ६२१ के महान इष्ट के वर्ग ६२५ से गुणा करने पर ३८८१२५ हुआ। इसके मूल ६२३ को गुण पद से गुणित छेद २५ × १ = २५ से भाग देने पर ६२३ ÷ २५ = $२४\frac{२३}{२५}$ हुआ। इसी तरह ५२ और ६० भुज पर से लम्ब वर्ग २७०० हुआ। इसका आसन्न मूल उक्त रीति से $५१\frac{३४}{२५}$ हुआ। यहाँ एक दिशा की आबाधाओं का अन्तर शून्य है, अतः दोनों लम्बों का योग ($२४\frac{२३}{२५} + ५१\frac{३४}{२५}$) = $७६\frac{३२}{२५}$ = दूसरा कर्ण हुआ।

समलम्ब का उदाहरण

यहाँ भूमि = ६० और मुख = २५, अतः मुखोनभूमि = ६० − २५ = ३५ भूमि, दोनों भुज ३९।५२ अब 'त्रिभुजे भुजयोर्योगः' इस सूत्र से छोटी आबाधा $\frac{३}{५}$ और बड़ी आबाधा $\frac{१७२}{५}$ तथा लम्ब वर्ग = $\frac{३८०१६}{२५}$ ।

अब २५ इष्ट मान कर $\frac{३८०१६}{२५}$ का आसन्न मूल ३८$\frac{६२२}{६२५}$ हुआ ।

अब 'आबाधयोना चतुरस्रभूमिः' इस सूत्र के अनुसार ६० − $\frac{३}{५}$ = $\frac{३००-३}{५}$ = $\frac{२९७}{५}$ के वर्ग $\frac{८८२०९}{२५}$ में लम्ब वर्ग $\frac{३८०१६}{२५}$ को जोड़ कर $\frac{८८२०९}{२५}$ + $\frac{३८०१६}{२५}$ = $\frac{१२६२२५}{२५}$ = ५०४९ का आसन्न मूल २० इष्ट मान कर लेने से ७१$\frac{१}{२०}$ एक कर्ण हुआ । इसी तरह दूसरी आबाधा $\frac{१५२}{५}$ को भूमि में घटा कर शेष (६० − $\frac{१७२}{५}$) = $\frac{१२८}{५}$ के वर्ग $\frac{१६३८४}{२५}$ में लम्ब वर्ग $\frac{३८०१६}{२५}$ को जोड़ने से २१७६ हुआ । इसका आसन्न मूल ४६$\frac{१३}{२०}$ दूसरा कर्ण हुआ । इस तरह चतुर्भुज में भुजाओं के मान स्थिर रहने पर भी अनेक प्रकार के कर्ण होते हैं ।

एवमनियतत्वेऽपि नियतावेव कर्णावानीतौ ब्रह्मगुप्ताद्यैस्तदानयनं यथा ।

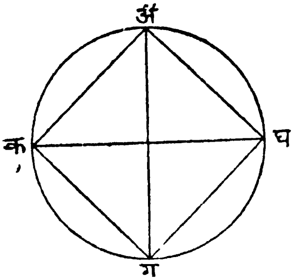
कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योऽन्यभाजितं गुणयेत् ।
योगेन भुजप्रतिभुजबधयोः कर्णौ पदे विषमे ॥

उभयथा कर्णाश्रितभुजघातैक्यं भुजप्रतिभुजबधयोः योगेन गुणयेत्, अन्यो-न्यभाजितं पदे, विषमे (चतुर्भुजे) कर्णौ स्याताम् ।

विषम चतुर्भुज में कर्णाश्रित दो दो भुजाओं के घात का योग कर उनको अलग-अलग रखें । बाद में सम्मुखस्थ भुजद्वय घातों के योग से गुणा कर द्वितीय कर्णाश्रित भुजद्वय के घातों के योग से भाग दें, तो प्रथम कर्ण और प्रथम कर्णाश्रितभुजद्वय के घातों के योग से भाग देने पर द्वितीय कर्ण होता है।

उपपत्तिः—कल्प्यते अ क ग घ वृत्तान्तर्गतं चतुर्भुजं यस्य भुजाः अ क = अ, क ग = क, ग घ = ग, घ अ = घ तथा अ ग, क घ कर्णौ । वृत्तान्तर्गत-चतुर्भुजे सम्मुखकोणयोर्योगस्य समकोणद्वयसमत्वेन $\angle$अ + $\angle$ग = १८०°,

$\therefore \angle अ = १८० - \angle ग$ । $\therefore$ कोज्या अ = कोज्या $(१८०^{\circ} - ग)$ वा



कोज्या अ = − कोज्या ग, [कोणोनसमकोणद्वयस्य कोटिज्यायास्तत्कोणकोटिज्यया ऋणगतया समत्वात्] परञ्च 'भुजवर्गयुतिर्भूमिवर्गोना भुजघातहृत्। दलिता त्रिभुजस्यान्नकोटिज्या भुजसंयुताविति सरल त्रिकोणमित्या यदि क घ = प तदा-
कोज्या अ

$$= \frac{अ^2 + घ^2 - प^2}{२ अ घ}, \text{ एवं कोज्या ग} = \frac{क^2 + ग^2 - प^2}{२ क ग}$$

$$\therefore \frac{अ^2 + घ^2 - प^2}{२ अ घ} = - \frac{क^2 + ग^2 - प^2}{२ क ग} ।$$

$$\therefore २ क ग (अ^2 + घ^2 - प^2) = - २ अ घ (क^2 + ग^2 - प^2)$$

$$\therefore अ^2 \cdot क ग + घ^2 \cdot क ग - प^2 क ग = - क^2 \cdot अ घ - ग^2 \cdot अ घ + प^2 \cdot अ घ$$

$$\therefore प^2 \cdot अ घ + प^2 \cdot क ग = अ^2 \cdot क ग + घ^2 \cdot क ग + क^2 \cdot अ घ + ग^2 \cdot अ घ$$

$$\therefore प^2 (अ घ + क ग) = अ क (अ ग + क घ) + ग घ (क घ + अ ग)$$

$$\therefore प^2 (अ घ + क ग) = (अ क + ग घ)(अ ग + क घ)$$

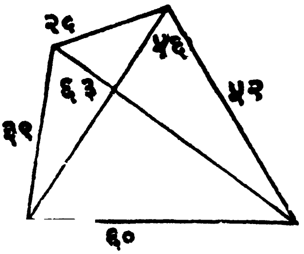
$$\therefore प^2 = \frac{(अ क + ग घ)(अ ग + क घ)}{अ \cdot घ + क \cdot ग}$$

$$\therefore प = \sqrt{\frac{(अ \cdot क + ग \cdot घ)(अ \cdot ग + क \cdot घ)}{अ \cdot घ + क \cdot ग}} = \text{प्रथम कर्णः ।}$$

एवमेव द्वितीयकर्ण $अ ग = \sqrt{\frac{(अ \cdot घ + क \cdot ग)(अ \cdot ग + क \cdot घ)}{अ \cdot क + घ \cdot ग}}$

परञ्चैवं वृत्तान्तर्गतस्यैव चतुर्भुजस्य कर्णमानं भवतीति स्फुटं विभावनीयम्
अत उपपन्नम् ।

न्यासः ।



कर्णाश्रितभुजघातेति एकवारमनयो २५।३९ घातः ९७५ तथा ५२।६० अनयोर्घातः ३१२० । घातयोर्द्वयोरैक्यम् ४०९५ तथा द्वितीयवारं २५।५२ अनयर्घाते जातं १३०० । तथा ३९ । ६० । अनयोर्घाते जातं २३४० घातयोर्द्वयोरैक्यं ३६४० । एतदैक्यं भुजप्रतिभुजयोः ५२ । ३९ । घातः २०२८ पश्चात् २५ । ६० अनयोर्बधः १५०० तयोरैक्यं ३५२८ । अनेनैक्येन २६४० गुणितं जातं पूर्वैक्यं १२८४१९२० । प्रथमकर्णाश्रितभुजघातैक्येन ४०९५ भक्तं लब्धं ३१३६ । अस्य मूलं ५६ । एककर्णस्तथा द्वितीयकर्णार्थं प्रथमकर्णाश्रितभुजघातैक्यं ४०९५ । भुजप्रतिभुजवधयोग ३५२८ गुणितं जातं १४४४७१६० । अन्यकर्णाश्रितभुजघातैक्येन ३६४० । भक्तं लब्धं ३९६९ । अस्य मूलं ६३ द्वितीयः कर्णः । अस्मिन् विषये क्षेत्रकर्णसाधने अस्य कर्णानयनस्य प्रक्रियागौरवम् ।

उदाहरण—एक कर्ण के आश्रित २५ और ३९ का घात ९७५ तथा ५२ और ६० का घात ३१२० हुए । दोनों का योग ४०९५ हुआ । द्वितीय कर्ण के आश्रित भुजद्वय २५।५२ का घात १३०० एवं ३९ और ६० का घात २३४० हुए । इन दोनों का योग ३६४० हुआ । सम्मुख स्थित दो-दो भुजाओं का घात करने पर क्रम से ५२ × ३९ = २०२८ और २५ × ६० = १५०० हुए । इन दोनों का योग २०२८ + १५०० = ३५२८ हुआ । इससे द्वितीयकर्णाश्रित भुजघातैक्य ३६४० को गुणा करने से १२८४१९२० हुआ । इसे प्रथमकर्णाश्रितभुजघातैक्य ४०९५ से भाग दिया तो लब्धि ३१३६ का वर्गमूल ५६ प्रथम कर्ण हुआ । अब प्रथमकर्णाश्रितभुजघातैक्य ४०९५ को भुज प्रतिभुज बध योग ३५२८ से गुणा किया तो १४४४७१६० हुआ । इसको अन्यकर्णाश्रितभुजघातैक्य ३६४० से भाग दिया तो लब्धि ३९६९ का मूल ६३ दूसरा कर्ण हुआ । ब्रह्मगुप्तादि आचार्यों की यह रीति बहुत विस्तार से है, अतः लघु रीति से कर्णानयन की रीति आगे कही गई है ।

लघुप्रक्रियादर्शनद्वारेणाह—

अभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः
परस्परं कर्णहता भुजा इति ।
चतुर्भुजं यद्विषमं प्रकल्पितं
श्रुती तु तत्र त्रिभुजद्वयात्ततः ॥ ३२ ॥
बाह्वोवधः कोटिवधेन युक् स्या-
देका श्रुतिः कोटिभुजावधैक्यम् ।
अन्या लघौ सत्यपि साधनेऽस्मिन्
पूर्वैः कृतं यद्गुरु तन्न विद्मः ॥ ३३ ॥

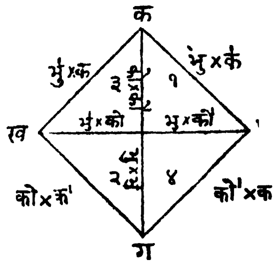
अभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः परस्परं कर्णहतास्तदा (विषम चतुर्भुजे) भुजा भवन्ति । चतुर्भुजं विषमं यत् प्रकल्पितं तत्र त्रिभुजद्वयात् श्रुती भवतः । ततः बाह्वोः बधः कोटिवधेन युक् एका श्रुतिः स्यात् । कोटिभुजावधैक्यं अन्या श्रुतिः स्यात् । एवं लघौ साधने सत्यपि अस्मिन् पूर्वैः यत् गुरु कृतं तत् न विद्मः ।

इच्छानुसार दो जात्य त्रिभुज बना कर उनमें एक के कर्ण से दूसरे के भुज और कोटि को तथा दूसरे के कर्ण से प्रथम के भुज और कोटि को गुणा करें तो विषम चतुर्भुज के चारों भुज हो जायेंगे । उस चतुर्भुज के कर्ण भी उक्त त्रिभुजद्वय से जाने जाते हैं, जैसे—दोनों त्रिभुज के भुजद्वय के घात में कोटिद्वय के घात को जोड़ने पर एक कर्ण होता है । एक त्रिभुज की कोटि को दूसरे त्रिभुज के भुज से तथा दूसरे त्रिभुज की कोटि को प्रथम त्रिभुज के भुज से गुणा कर दोनों को जोड़ने से दूसरा कर्ण होता है । ग्रन्थकार कहते हैं कि इस तरह की सरल रीति रहने पर भी पूर्वाचार्यों ने जो गौरव-प्रकार कहा इसका कारण ज्ञात नहीं होता ।

उपपत्तिः—कल्प्यते प्रथमजात्यत्रिभुजस्य भुजकोटिकर्णाः क्रमेण भु, को, क तथा द्वितीयस्य भुजः = भु', कोटिः = को', कर्णः = क' । अथ कस्यापि जात्यत्रिभुजस्येष्टगुणितभुजादिवशेन यदन्यं जात्यत्रिभुजमुत्पद्यते तत्प्रथम-जात्यत्रिभुजस्य साजात्यमिति क्षेत्रमित्या स्पष्टमतः प्रथमजात्यस्य भुजकोटिभ्यां

द्वितीयस्य भुजकोटिकर्णाः पृथक्-पृथक् गुण्यन्ते तदा जात्यद्वयं स्यादेवं द्वितीय
जात्यस्य भुजकोटिभ्यां प्रथमस्य भुजकोटिकर्णा यदि गुण्यन्ते तदापि जात्यद्व
स्यात्। एवमुत्पन्नानि चत्वारि जात्यत्रिभुजानि मिथः सजातीयानि। अथैष
योगेनैकं विषमचतुर्भुजं जायते तत्राचार्योक्तं कर्णमानं स्पष्टं स्यात्। यथोदाह
स्योच्यते त्रिभुजानां स्वरूपाणि—

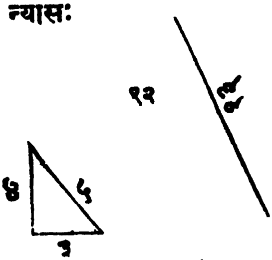
१ त्रिभुजस्य भुजकोटिकर्णाः क्रमेण भु × भु′, भु × को′, भु × क′
२ „ „ „ को × भु′, को × को′, को × क′
३ „ „ „ भु′ × भु, भु′ × को, भु′ × क
४ „ „ „ को′ × भु, को′ × को, को′ × क



अत्र १ म △ भुज = ३ य △ भु
१ म △ को = ४ △ भु। २ य △ को = १
△ को। अतस्तुल्यभुजकोटीनां तुल्योपरि
स्थापनेन क ख ग घ विषमचतुर्भुजं सञ्जातमस्य
स्वरूपदर्शनेनैवाभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटयः परस्परं
कर्णहताः इत्यादि पद्यमुपपद्यते।

जात्यक्षेत्रद्वयम्।

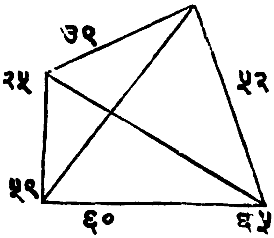
न्यासः



एतयोरितरेतरकर्णहता भुजाः कोटयः
भुजा इति कृते जातं २५। ६०। ५२। ३९।
तेषु महती भूर्लघु मुखमितरौ बाहू इति
प्रकल्प्य क्षेत्रदर्शनम् इमौ कर्णौ महतायासेना-
नीतौ ६३। ५६। अस्यैव जात्यद्वयस्योत्तरो-
त्तरभुजकोट्योर्घातौ जातौ ३६। २० अन-
योरैक्यमेकः कर्णः ५६। बाह्वोः ३। ५।
कोट्योश्च। ४। १२। घातौ १५। ४८। अनयोरैक्यमन्यः कर्णः ६३।
एवं भुजौ स्याताम्। एवं सुखेन जाते।

अथ यदि पार्श्वभुजयोर्व्यत्ययं कृत्वा न्यस्तं क्षेत्रम् ।

न्यासः



तदा जात्यद्वयकर्णयोर्बधः ६५ द्वितीयकर्णः ।

उदाहरण

प्रथम त्रिभुज के भुजकोटि कर्ण ३, ४, ५ और द्वितीय त्रिभुज के भुजकोटिकर्ण ५, १२, १३ हैं। अब सूत्र के अनुसार प्रथम त्रिभुजके कर्ण से द्वितीय त्रिभुज के भुज और कोटि को तथा द्वितीय त्रिभुज के कर्ण से प्रथम त्रिभुज के भुज और कोटि को गुणा करने से विषम चतुर्भुज के चारो भुज क्रम से २५, ६०, ५२ और ३९ हुए। अब दोनों त्रिभुजों के भुजों के घात (३ × ५ =) १५ में कोटियों के घात (४ × १२ =) ४८ को जोड़ने से (१५ + ४८ =) ६३ एक कर्ण हुआ। अब प्रथम त्रिभुज की कोटि ४ को द्वितीय त्रिभुज के भुज ५ से गुणा करने पर २० हुआ। इसमें प्रथम त्रिभुज के भुज और द्वितीय त्रिभुज की कोटि का घात ३ × १२ = ३६ को जोड़ने पर २० + ३६ = ५६ दूसरा कर्ण हुआ।

परिशिष्ट

विषमकोण समचतुर्भुज उस समानान्तर चतुर्भुज को कहते हैं जिसकी चारों भुजायें बराबर होती हैं, लेकिन वर्गक्षेत्र की तरह इसका प्रत्येक कोण समकोण नहीं होता है। इसका कर्ण एक दूसरे को समकोण बिन्दु पर दो बराबर भागों में बाँटता है। अब उपपत्ति के द्वारा यह स्पष्ट है कि विषमकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल=दोनों कर्णों के गुणनफल का आधा$=\frac{क \times क'}{२}$...(१)

तथा भु $= \sqrt{क^{२}+क'^{२}}$......(२) लम्ब (ऊँचाई) $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{भुजा}}$......(३)

उदाहरण

(१) किसी विषमकोण समचतुर्भुज के कर्ण ७२ फी० और ९६ फी० हैं तो उसका क्षेत्रफल और भुजा की लम्बाई बताओ।

क्षेत्रफल $= \frac{क \times क'}{२}$। यहाँ क = ७२ फी० तथा क' = ९६ फी०।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{७२ \times ९६}{२}$ व· फी· $=$ ७२ $\times$ ४८ व· फी· $=$ ३४५६ व· फी

विषमकोणसमचतुर्भुज की भुजा $= \sqrt{\frac{क^२ + क'^२}{२}} = \sqrt{\frac{७२ \times ७२ + ९६ + ९६}{४}}$

$= \sqrt{१८ \times ७२ + २४ \times ९६} = \sqrt{१४४ (९ + १६)} = \sqrt{१४४ \times २५}$

$=$ १२ $\times$ ५ $=$ ६० फी०।

(२) किसी विषमकोण समचतुर्भुज की भुजा २५ गज और उसका एक कर्ण ४० गज हैं, तो उसका दूसरा कर्ण और क्षेत्रफल बताओ।

यहाँ दूसरा कर्ण $= \sqrt{४ भु^२ - कर्ण^२} = \sqrt{४ \times २५^२ - ४०^२}$ गज

$= \sqrt{४ \times ६२५ - १६००} = \sqrt{२५०० - १६००} = \sqrt{९००} =$ ३० गज।

अब क्षेत्रफल $= \frac{४० \times ३०}{२}$ व· ग· $=$ २० $\times$ ३० व· ग· $=$ ६०० व· ग·।

(३) एक विषमकोण समचतुर्भुज के कर्ण ३० इञ्च और १६ इञ्च हैं, तो उसका क्षेत्रफल, भुजयोग तथा ऊँचाई का मान बताओ। यहाँ क्षेत्रफल

$= \frac{३० \times १६}{२} =$ ३० $\times$ ८ $=$ २४० व· इ·।

भुजा $= \sqrt{\frac{३०^२ + १६^२}{२}} = \sqrt{\frac{९०० + २५६}{४}} = \sqrt{२२५ + ६४} = \sqrt{२८९}$

$=$ १७ इञ्च।

$\therefore$ चारों भुजाओं का योग $=$ ४ $\times$ १७ $=$ ६८ इञ्च।

ऊँचाई $= \frac{क्षेत्रफल}{भुजा} = \frac{२४०}{१७}$ इञ्च $=$ १४$\frac{२}{१७}$ इञ्च।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) किसी विषमकोण समचतुर्भुज के कर्ण ८८ गज और २३४ गज हैं, तो उसके क्षेत्रफल, भुजा और लम्ब बताओ।

(२) किसी विषमकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ३५४१४४ व० फी० और उसका एक कर्ण ६७२ फी० है, तो उसका दूसरा कर्ण, भुजा और ऊँचाई का मान बताओ।

(३) एक विषमकोण समचतुर्भुज के कर्णार्ध क्रम से ८ इञ्च और १६ इञ्च हैं, तो उसकी भुजा और क्षेत्रफल बताओ।

(४) किसी विषमकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ६२५ वर्ग गज है। यदि उसका एक कर्ण दूसरे कर्ण का आधा हो, तो उसकी भुजा ऊँचाई और कर्ण की लम्बाई बताओ।

(५) एक विषमकोण समचतुर्भुजाकार चटाई का क्षेत्रफल ८ व० ग० है। यदि उसका भुजयोग ३६ गज हो, तो उसकी लम्बरूप चौड़ाई बताओ।

(६) किसी विषमकोण समचतुर्भुज का क्षेत्रफल २१६०० वर्ग फीट है। यदि उसका एक कर्ण १८० फीट है, तो उसका दूसरा कर्ण, भुजा और ऊँचाई का मान बताओ।

(७) एक विषमकोण समचतुर्भुज की भुजा २० गज है। यदि उसका छोटा कर्ण बड़े कर्ण का $\frac{३}{४}$ है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

वर्ग और आयत का क्षेत्रफल

हम लोग यह जानते हैं कि वर्ग वह समानान्तर चतुर्भुज है, जिसकी सभी भुजायें बराबर और सभी कोण समकोण होते हैं। आयत में भी सभी कोण समकोण होते हैं, किन्तु उसकी सामने की भुजायें ही आपस में बराबर और समानान्तर होती हैं। रेखागणित से यह स्पष्ट है कि वर्ग और आयत के दोनों कर्ण बराबर होते है, अतः भास्कराचार्य ने वर्ग का नाम समश्रुति तुल्य चतुर्भुज, विषमकोण समचतुर्भुज का नाम तुल्य चतुर्भुज तथा आयत का नाम आयत ही रखा है। आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई ···(१) चूँकि वर्ग की लम्बाई और चौड़ाई बराबर होती हैं, अतः वर्ग का क्षेत्रफल=लम्बाई × चौड़ाई $= \text{लम्बाई}^2 = \text{चौड़ाई}^2 = \text{भु}^2$ ······(२) $\therefore$ आयत की लम्बाई $= \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$।

तथा चौड़ाई $= \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}}$। और वर्ग की भुजा $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$।

उदाहरण

(१) किसी वर्ग की भुजा २ गज २ फीट ३ इञ्च है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

वर्ग का क्षेत्रफल = भु^{२} । यहाँ भु = २ गज २ फी० ३ इञ्च = $२ + \frac{२\frac{१}{४}}{३}$ गज = $२ + \frac{\frac{९}{४}}{३}$ गज = $२ + \frac{९}{१२}$ गज = $२ + \frac{३}{४}$ गज = $\frac{११}{४}$ गज

∴ अभीष्ट क्षेत्रफल = $\left(\frac{११}{४}\right)^{२} = \frac{१२१}{१६}$ व० ग० = ७ व० ग० ५ व० फी० ९ व० इ०

(२) किसी आयत की लम्बाई १५ गज और चौड़ाई ८ गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = १५ × ८ = १२० व० ग० ।

(३) किसी आयत का क्षेत्रफल २०८ वर्ग फीट है । यदि उसकी लम्बाई १६ फीट हो, तो उसकी चौड़ाई बताओ ।

आयत की चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}} = \frac{२०८}{१६}$ फी० = १३ फी० ।

(४) किसी घर की सतह का क्षेत्रफल ३४० वर्ग गज है । यदि उसकी चौड़ाई १७ गज हो, तो उसकी लम्बाई बताओ ।

लम्बाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}} = \frac{३४०}{१७}$ गज = २० गज ।

(५) एक वर्ग का क्षेत्रफल ७ वर्ग फीट १६ वर्ग इञ्च है, तो उसकी भुजा बताओ ।

वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$ । यहाँ क्षेत्रफल = ७ व० फी० १६ व० इ० = १०२४ व० इ० । ∴ अभीष्ट भुजा = $\sqrt{१०२४}$ = ३२ इञ्च ।

(६) किसी वर्ग का क्षेत्रफल १४ व० फी० ९ व० इ० है, तो उसका भुजयोग बताओ ।

वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$ । यहाँ क्षेत्रफल = १४ व० फी० ९ व० इ० = २०२५ व० इ० । ∴ भुजा = $\sqrt{२०२५}$ = ४५ इ० ।

∴ अभीष्ट वर्ग की चारो भुजाओं का योग = ४५ × ४ = १८० इ० = १५ फीट ।

(७) एक आयताकार कपड़े की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दूनी है । यदि उसका क्षेत्रफल ४६०८ वर्ग इञ्च हो, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ ।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई। यहाँ लम्बाई = २ चौड़ाई

$\therefore$ क्षेत्रफल = २ चौड़ाई × चौड़ाई = २ चौड़ाई^{२}

लेकिन क्षेत्रफल = ४६०८ व० इ०। $\therefore$ २ चौड़ाई^{२} = ४६०८ व० इ०

$\therefore$ चौड़ाई^{२} = २३०४ व० इ०। $\therefore$ चौड़ाई = $\sqrt{२३०४}$ = ४८ इञ्च = ४ फीट।

नोट:—इस तरह के प्रश्न में चौड़ाई से लम्बाई जितनी गुनी हो उतने से क्षेत्रफल में भाग देकर उसका वर्गमूल लेना चाहिये, तो चौड़ाई निकल आती है।

(८) एक आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ५० गज २ फीट और ३२ गज १ फुट हैं, तो ८ आने प्रति वर्ग गज की दर से उसमें घास लगाने में कितना खर्च लगेगा।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई। यहाँ लम्बाई = ५० गज २ फीट = १५२ फीट, और चौड़ाई ३२ गज १ फुट = ९७ फीट

$\therefore$ क्षेत्रफल = १५२ × ९७ व० फी० = $\frac{१५२\times९७}{९}$ व० ग० = $\frac{१४७४४}{९}$ व० ग०

अब ८ आने प्रतिवर्ग गज की दर से घास लगाने का खर्च = $\frac{१४७४४\times८}{९}$ आने

= $\frac{\overset{७३७२}{\cancel{१४७४४}}\times\cancel{८}}{९\times\cancel{१६}_{२}}$ रु० = $\frac{७३७२}{९}$ रु० = ८१९ रु० १ आ० १$\frac{१}{३}$ पा०।

(९) एक आयताकार उद्यान का क्षेत्रफल २४०० वर्ग गज है, तो उसमें बिछाने के लिये २ फीट लम्बे और १ फु० चौड़े पत्थर के टुकड़े कितने लगेंगे।

आयत का क्षेत्रफल = २४०० व० ग०। पत्थर के एक टुकड़े का क्षेत्रफल = २ × १ व० फी० = २ व० फी० = $\frac{२}{९}$ व० ग०।

$\therefore$ २४०० ÷ $\frac{२}{९}$ = $\frac{२४००\times९}{२}$ = १२०० × ९ = १०८०० टुकड़े लगेंगे।

(१०) किसी कोठरी की लम्बाई ३५ फीट और चौड़ाई २४ फीट है, तो ५ शि० ४ पे० प्रति गज की दर से उसमें १ गज चौड़ी दरी बिछाने का खर्च बताओ।

कोठरी का क्षेत्रफल = ३५ × २४ व० फी० = ८४० व० फी०। लेकिन दरी का क्षेत्रफल = कोठरी का क्षेत्रफल = ८४० व० फी०। दरी की चौड़ाई = १ गज = ३ फीट। $\therefore$ दरी की लम्बाई = ८४० ÷ ३ = २८० फीट = २८० ÷ ३ = ९३$\frac{१}{३}$ गज। $\because$ दरी बिछाने का खर्च = (५ शि०

४ पे०) $\times \frac{२८०}{३} = \frac{१६}{३} \times \frac{२८०}{३}$ शि० $= \frac{१६ \times २८०}{९ \times २०}$ पौ० $= \frac{१६ \times १४}{९}$ पौ० $= \frac{२२४}{९}$ पौ० = २४ पौ० १७ शि० ९$\frac{१}{३}$ पे० ।

(११) किसी मकान की लम्बाई ३० फीट ६ इञ्च, चौड़ाई २० फीट और ऊँचाई १२ फीट है, तो उसकी चारों दीवारों को रंगने का खर्च २ आ० प्रति वर्ग फुट की दर से बताओ।

चारों दीवारों का क्षेत्रफल = २ ऊँचाई (लम्बाई + चौड़ाई) = २×१२ (३० फी० ६ इञ्च + २० फी०) = २४ (३०$\frac{१}{२}$ + २०) व॰ फी॰

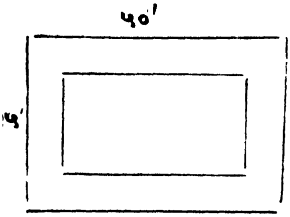
$= \frac{२४ \times १०१}{२}$ व॰ फी॰ = १२ × १०१ व॰ फी॰ = १२१२ व॰ फी॰

∵ दीवारों को रंगने का खर्च = १२१२ × २ आना = २४२४ आना

$= \frac{२४२४}{१६}$ रु० = १५१ रु० ८ आ० ।

नोट—छात्रों को यह ध्यान रखना चाहिये कि चारों दीवारों का क्षेत्रफल = २ ऊँचाई (लम्बाई + चौड़ाई)

(१२) एक आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ५० फीट और ४५ फीट हैं। इसके भीतर चारों तरफ ६ फीट चौड़ा एक रास्ता है, तो रास्ते का क्षेत्रफल निकालो।



मैदान का क्षेत्रफल = ५० × ४५ व॰ फी॰ = २२५० व॰ फी॰ रास्ता को छोड़ कर मैदान की लम्बाई = (५० − २ × ६) फी० = ५० − १२ = ३८ फी० । रास्ता को छोड़ कर मैदान की चौड़ाई = (४५ − २ × ६) फी० = ४५ − १२ = ३३ फी० । ∴ रास्ता ो छोड़ कर मैदान का क्षेत्रफल = ३८ × ३३ व॰ फी॰ = १२५४ व॰ फी॰ ।

∴ रास्ते का क्षेत्रफल = २२५० व॰ फी॰ − १२५४ व॰ फी॰ = ९९६ व॰ फी॰ ।

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

१) एक आयत की लम्बाई १६ फीट और चौड़ाई १५ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

२) एक आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ५ गज २ फीट ३ गज १ फुट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(३) किसी आयत की लम्बाई ८५ इञ्च और चौड़ाई ३० इञ्च है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(४) एक वर्ग की भुजा ५ गज २ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(५) किसी वर्ग की भुजा २५ फीट ३ इञ्च है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(६) किसी वर्ग की भुजा ४४० गज है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(७) एक आयत का क्षेत्रफल १८ व० ग० ३ व० फी० है। यदि उसकी लम्बाई १५ फीट हो, तो उसकी चौड़ाई बताओ।

(८) किसी आयत का क्षेत्रफल २६ व० ग० ४ व० फी० है। यदि उसकी चौड़ाई १४ फीट हो, तो उसकी लम्बाई बताओ।

(९) एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल २० एकड़ है। यदि उसकी लम्बाई ९६८ गज हो, तो उसकी चौड़ाई बताओ।

(१०) किसी आयताकार मैदान का क्षेत्रफल ३६ एकड़ है। यदि उसकी चौड़ाई २८८ गज हो, तो उसकी लम्बाई बताओ।

(११) एक वर्ग का क्षेत्रफल ४८४ वर्ग गज है, तो उसकी भुजा बताओ।

(१२) किसी वर्ग का क्षेत्रफल ३ व० ग० १ व० फु० ६४ व० इ० है, तो उसकी भुजा बताओ।

(१३) किसी वर्ग का क्षेत्रफल १० एकड़ है, तो उसकी भुजा बताओ।

(१४) किसी वर्ग का क्षेत्रफल ६२५० एकड़ है, तो उसकी भुजा बताओ।

(१५) किसी आयत का भुजयोग ३३ फीट है। यदि इसकी लम्बाई चौड़ाई से दूनी हो, तो क्षेत्रफल बताइये।

(१६) किसी आयत का क्षेत्रफल १ व० ग० ६ व० फी० ६ व० इ० है। यदि उसकी लम्बाई-चौड़ाई का $\frac{३}{२}$ हो, तो लम्बाई और चौड़ाई अलग-अलग बताओ।

(१७) किसी आयताकार खेत की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १५० फी० ३ इञ्च और ४५ फी० ६ इञ्च है, तो इसके बराबर क्षेत्रफल वाले दूसरे खेत की चौड़ाई बताओ यदि उसकी लम्बाई ४५० फीट ९ इञ्च हो।

(१८) एक वर्ग का क्षेत्रफल ६७६ व० फी० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१९) किसी वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल २०५ एकड़ है, तो उसकी भुजा बताओ।

(२०) किसी आयताकार खेत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से ४ गुनी है। यदि उसका क्षेत्रफल $\frac{1}{2}$ एकड़ हो, तो लम्बाई और चौड़ाई अलग-अलग बताओ।

(२१) किसी वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ४९० एकड़ है, तो उसके चारों तरफ घूमने में ४ माइल प्रति घण्टे की दर से कितना समय लगेगा।

(२२) एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ६०४ एकड़ है, तो उसके चारों तरफ घूमने में ५ माइल प्रति घण्टे की दर से कितना समय लगेगा।

(२३) एक वर्गाकार झील का क्षेत्रफल १० एकड़ है, तो दो माइल का चक्कर लगाने के लिये उसके चारों तरफ कितनी बार घूमना पड़ेगा।

(२४) किसी वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल १ एकड़ २३८५ व० ग० है। तो इसको चारों तरफ से घेरने में १ शि० ५ पे० प्रति गज की दर से क्या खर्च लगेगा।

(२५) एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल २२०५ एकड़ है, तो उसको चारों ओर से घेरने में प्रति गज १ रु० ८ आ० की दर से कितना खर्च लगेगा।

(२६) किसी वर्गाकार उद्यान को चारों तरफ से घेरने में प्रति गज १ रु० ४ आने की दर से २२० रु० खर्च होता है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ

(२७) किसी आयताकार घास के मैदान की लम्बाई, उसकी चौड़ाई का $\frac{3}{2}$ है। यदि उसमें प्रति वर्ग गज ४ पे० की दर से घास लगाने का खर्च १४ पौ० ८ शि० होता है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

(२८) एक वर्गाकार मैदान में प्रति एकड़ २ पौ० १४ शि० ६ पे० की दर से २७ पौ० ५ शि० खर्च होता है, तो उसको चारों ओर से घेरने में ९ पे० प्रति गज की दर से क्या खर्च लगेगा।

(२९) किसी आयताकार खेत की मालगुजारी प्रति एकड़ ९ शि० ६ पे० की दर से ९५ पौ० होती है। यदि उसकी चौड़ाई ९६८ गज हो, तो उसकी लम्बाई बताओ।

(३०) एक आयताकार घर की लम्बाई ८५·३ फीट और चौड़ाई ४०·५ फीट है, तो उसकी सतह पर बिछाने के लिये ३·५ फीट चौड़ी चटाई की लम्बाई बताओ। यदि प्रति वर्ग गज चटाई बिछाने में २ रु० १० आ० ८ पा० हो, तो सब खर्च कितना लगेगा।

(३१) एक आयताकार बरामदे की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ४२ फीट और १५ फीट है, तो उसे १८ इञ्च भुजावाले वर्गाकार पत्थर के टुकड़ों से मढ़ने में कितना खर्च लगेगा यदि प्रत्येक टुकड़े का मूल्य १२ आना हो।

(३२) किसी कोठरी की लम्बाई १९ फी० ७ इञ्च और चौड़ाई १८ फीट ९ इञ्च है, तो उसके भीतर बिछाने के लिये कितनी लम्बी दरी की आवश्यता होगी, यदि दरी की चौड़ाई २५ इञ्च है।

(३३) एक वर्गाकार कोटरी की भुजा ९ फी० ४ इ० है। इसमें बिछाने के लिये २ फीट ४ इञ्च चौड़ी चटाई की लम्बाई और २ आ० ३ पा० प्रति गज की दर से उसका खर्च बताओ।

(३४) किसी वर्गाकार कोठरी की भुजा २४ गज है। यदि इसमें दरी बिछाने का खर्च १६ पौ० लगता है, तो प्रति व० ग० इसी दर से एक आयताकार कोठरी में, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १८ गज और १५ गज हैं, कितना खर्च लगेगा।

(३५) किसी कोठरी की लम्बाई १७ फी० ६ इञ्च और चौड़ाई १२ फी० है। यदि उसमें दरी बिछाने का खर्च ४ पौ० १ शि० ८ पे० लगता है, तो उसी दर से २३ फी० ३ इञ्च लम्बी और १६ फी० चौड़ी कोठरी में दरी बिछाने का खर्च बताओ।

(३६) एक कोठरी की लम्बाई २१ फी० ९ इञ्च और चौड़ाई १८ फी० ८ इञ्च है, तो एक आयताकार दरी, जिसकी लम्बाई १७ फी० १½ इञ्च और चौड़ाई १६ फी० ११ इञ्च है, उस कोठरी की सतह को कितना ढँकेगी।

(३७) किसी आयताकार कोठरी की लम्बाई ८ गज और चौड़ाई ६ गज है।

उसकी सतह में २७ इञ्च चौड़ी दरी बिछाने का खर्च प्रति गज १ शि० ८ पे० की दर से बताओ।

(३८) किसी बरामदे की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ७० गज और ९ गज है, तो उसमें बिछाने के लिये ५ इञ्च लम्बे और ४ इञ्च चौड़े पत्थर के टुकड़े कितने लगेंगे।

(३९) किसी कोठरी की लम्बाई चौड़ाई और उँचाई क्रम से ३७ फी० २ इञ्च, २५ फी० ८ इञ्च और २२ फी० ६ इञ्च है, तो उसकी चारों दीवारों को $१\frac{१}{४}$ गज चौड़े कागज से मढ़ने में प्रति गज १ शि० $१\frac{३}{४}$ पे० की दर से कितना खर्च लगेगा।

(४०) किसी कोठरी की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से ३० फी०, २२ फी० और $१८\frac{१}{२}$ फी० हैं। उसमें ५ दरवाजे और ३ खिड़कियाँ हैं। यदि प्रत्येक दरवाजा और खिड़की का क्षेत्रफल ३० व० फी० हो, तो दिवारों के शेष भागों को ३ आना प्रतिवर्ग गज की दर से रंगने का खर्च बताओ।

(४१) एक कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से २८ फी०, २० फी० और १० फीट हैं। इसमें एक दरवाजा, दो खिड़कियाँ और एक अग्नि स्थान (Fire place) हैं। यदि दरवाजे की ऊँचाई और चौड़ाई क्रम से ७ फी० और ४ फी०, प्रत्येक खिड़की की ऊँचाई और चौड़ाई क्रम से ५ फी० और ३ फी० तथा अग्निस्थान का क्षेत्रफल यदि १५ वर्ग फीट हैं, तो दीवार के शेष भागों में मढ़ने के लिये कागज की लम्बाई बताओ यदि उसकी चौड़ाई १ फी० ४ इञ्च हो।

(४२) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से ३५ फी०, २५ फी० और १० फी० है। ७ फी० ऊँचा और ६ फी० चौड़ा १ दरवाजा, तथा ६ फी० ऊँची और ४ फी० चौड़ी दो खिड़कियाँ और एक अग्निस्थान, जिसका क्षेत्रफल १८ व० फी० है, को छोड़कर दीवार के शेष भागों में २ फी० चौड़ा कागज लगवाने का खर्च प्रतिगज १० पेन्स की दर से बताओ।

(४३) किसी मकान की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से २० फी०

१६ फी० और १०½ फी० हैं। इसमें ६ फी० ऊँची और ४ फी० चौड़ी दो खिड़कियाँ, ७ फी० ऊँचा, ४ फी० चौड़ा १ दरवाजा और ४ फी० ऊँची तथा ३½ फी० चौड़ी एक चिमनी है, तो दीवार के शेष भागों में २ फी० ३ इञ्च चौड़े कितने कागज लगेंगे।

(४४) किसी कोठरी की लम्बाई २२ फी० ७ इञ्च, चौड़ाई १७ फी० ५ इञ्च और ऊँचाई १३ फी० ३ इञ्च हैं। उसमें १० फी० ६ इञ्च ऊँचा और ४ फी० चौड़ा एक दरवाजा, ९ फी० ४ इञ्च ऊँची और ५ फी० ३ इञ्च चौड़ी दो खिड़कियाँ और दो चिमनियाँ हैं जिनका क्षेत्रफल क्रम से २० व० फी० और २७ व० फी० हैं, तो दीवार के शेष भागों में लगाने के लिये कितने कागज की आवश्यकता होगी, यदि उसकी चौड़ाई २ फी० ३ इञ्च हो।

(४५) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से २५ फी० ७ इ०, २० फी० ५ इ० और १४ फी० हैं। इसकी दीवारों में ३ शि० ६ पें० प्रति वर्ग गज की दर से कागज लगवाया गया है, तथा इसकी छत को १ शि० २ पें० प्रति वर्ग फुट की दर से रंगा गया है तो सब खर्च कितना लगा यह बताओ।

(४६) किसी कोठरी की चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से १६ फी० और १२ फी० हैं। उसकी सतह में ३ आना प्रति वर्ग गज की दर से चटाई बिछाने का खर्च ७ रु० ९ आ० ४ पाई लगता है, तो उसी दर से दीवारों में कागज लगवाने का खर्च बताओ, यदि दीवारों में ६ दरवाजे हों और प्रत्येक दरवाजे का क्षेत्रफल १८ व० फी० हो।

(४७) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से १८ फी० १२ फी० और ११ फी० हैं, तो इसकी चारों दीवारों और छत में लगवाने के लिये कितने लम्बे कागज की आवश्यकता होगी, यदि कागज की चौड़ाई १ गज हो।

(४८) किसी कोठरी की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रम से १५ फी०, १० फी० ९ इञ्च और ९ फी० हैं। यदि इसकी चारों दीवारों में ¾ गज चौड़ा कागज लगवाने का खर्च प्रति गज ८½ पें० होता है,

और उसकी सतह में ३० इञ्च चौड़ी दरी बिछाने का खर्च प्रति गज ४ शि० ४ पें हों, तो कागज और दरी का सब खर्च बताओ ।

(४९) एक वर्गाकार घास के मैदान की भुजा २०० गज है। इसके बाहर चारों तरफ १० फी० चौड़ा एक रास्ता है, तो रास्ते में कंकड़ बिछाने का खर्च २ रु० ८ आ० प्रति १०० व० फी० की दर से क्या होगा।

(५०) किसी आयताकार मैदान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १०० फी० और ८० फी० हैं। इसके भीतर चारो तरफ ८ फी० चौड़ा एक रास्ता है, तो रास्ते का क्षेत्रफल और उसमें कंकड़ बिछाने का खर्च ५ आ० ३ पा० प्रति वर्ग गज की दर से बताओ ।

(५१) एक वर्गाकार उद्यान का क्षेत्रफल १० एकड़ है। उद्यान के भीतर ५ फीट चौड़ा चारो तरफ रास्ता है, तो रास्ते की मरम्मत का खर्च प्रति वर्ग फूट १ आ० ६ पाई की दर से बताओ ।

(५२) किसी वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल ४० एकड़ है। इसके बाहर चारो तरफ ३० फी० चौड़ी एक गली है, तो उस गली में बिछाने के लिये १ फु० लम्बा और ९ इञ्च चौड़ा पत्थर का टुकड़ा कितना लगेगा।

(५३) एक आयताकार पुष्पोद्यान की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से २१ गज और १० गज हैं। इसके बाहर चारो तरफ ६ फी० चौड़ा रास्ता है, तो रास्ते में पत्थर बिछाने का खर्च प्रति वर्ग गज ५$\frac{1}{4}$ पा० की दर से बताओ।

(५४) एक आयताकर घास का मैदान ४५ फी० लम्बा और १५ फी० चौड़ा है। इसके बाहर चारो तरफ ५ फी० चौड़ा रास्ता है, तो रास्ते का क्षेत्रफल बताओ।

(५५) एक घर की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से २२ फी० और १८ फी० हैं। इसके भीतर चारो तरफ दो फीट चौड़ी जगह खाली छोड़ कर बीच में बिछाने के लिये कितनी लम्बी दरी की आवश्यकता होगी, यदि उसकी चौड़ाई २७ इञ्च है। यदि प्रति गज का दाम २ शि० ९ पें हो, तो दरी बिछाने का खर्च बताओ।

(५६) किसी कोठरी की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से २० गज और २८ फी०

हैं, तो उसमें कितने छात्र बैठ सकते हैं, यदि प्रत्येक छात्र के लिये ४ फी० लम्बी और १० इञ्च चौड़ी जगह की आवश्यकता हो।

(५७) तीन वर्गों की भुजायें क्रम से ५, ६ और ८ फी० हैं, तो उस वर्ग की भुजा बताओ, जो इन वर्गों के योग से ५ गुणा है।

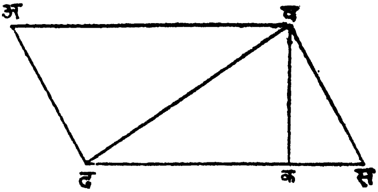
(५८) एक आयताकार मैदान की लम्बाई उसकी चौड़ाई से तीन गुणी है। उसके भीतर बिछाने के लिये २०२८ पत्थर के टुकड़े लगते हैं। यदि प्रत्येक टुकड़े का क्षेत्रफल $१\frac{१}{३}$ व० फी० हो, तो मैदान की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

(५९) एक टिकट की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से $\frac{३}{२}\frac{३}{४}$ इञ्च और $\frac{५}{६}$ इञ्च हैं, तो एक पुस्तक को ढँकने के लिये कितने टिकटों की आवश्यकता होगी, यदि पुस्तक की लम्बाई १ फु० ११ इञ्च और चौड़ाई १ फु० है।

(६०) किसी बगीचा में बिछाने के लिये १५३९ पत्थर के टुकड़ों की आवश्यकता होती है। यदि प्रत्येक टुकड़े का क्षेत्रफल ३६ वर्ग इञ्च हो, तो उस बगीचे से ७ गुणा एक दूसरे बगीचे में बिछाने के लिये ९ इञ्च लम्बा और $४\frac{१}{२}$ इञ्च चौड़ा कितने ईंटों की आवश्यकता होगी।

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

समानान्तर चतुर्भुज चार भुजाओं से घिरे हुये उस क्षेत्र को कहते हैं, जिसकी आमने सामने की भुजायें बाराबर एवं समानान्तर होती हैं, और कर्ण रेखा उसको दो बराबर हिस्सों में बाँटती है, यह रेखा गणित से स्पष्ट है। मान लिया कि अ ब स द एक समानान्तर चतुर्भुज है, जिसका कर्ण द ब और लम्ब ब क है। ∴ अ ब स द समानान्तर चतुर्भुज को द ब कर्ण दो बराबर भागों में बाँटता है, ∴ अ ब स द चतुर्भुज का क्षेत्रफल = २ △ ब स द = $\frac{२ \times ब क \times द स}{२}$ = ब क × द स



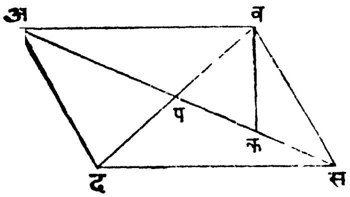
$=$ लम्ब $\times$ आधार ………(१)

$\therefore$ समानान्तर चतुर्भुज का आधार $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्ब}}$ ………(२)

और समानान्तर चतुर्भुज का लम्ब $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$ ………(३)

समानान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफलानयन का दूसरा प्रकार।

मान लिया कि अ व स द एक समानान्तर चतुर्भुज है, जिसमें अ स कर्ण



के ऊपर सामने के कोण बिन्दु व से व क लम्ब खींचा गया है। $\therefore$ अ स कर्ण उक्त समानान्तर चतुर्भुज को दो बराबर भागों में बाँटता है। $\therefore$ अ व स द समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र

फल $= २ \Delta$ अ व स $= \frac{२ \times \text{व क} \times \text{अ स}}{२} =$ व क $\times$ अ स $=$ कर्ण $\times$ लम्ब$'$ …(१)

$\therefore$ समानान्तर चतुर्भुज का कर्ण $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्ब}'}$ ………(२)

और लम्ब$' = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{कर्ण}}$ ……………(३)

अ व स द समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= २ \Delta$ अ व स। यहाँ यदि अ व $+$ व स $+$ अ स $=$ यो, तो 'सर्वदोर्युतिदलं' इस सूत्र के अनुसार Δ अ व स का क्षेत्रफल $= \sqrt{\frac{\text{यो}}{२}\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अ व}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{व स}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अ स}\right)}$ $\therefore$ अ व स द समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= २\sqrt{\frac{\text{यो}}{२}\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अव}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{वस}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२} - \text{अस}\right)}$ इससे यह स्पष्ट है कि यदि समानान्तर चतुर्भुज की संगति, भुजायें और एक कर्ण ज्ञात हो, तो उसका क्षेत्रफल आसानी से निकाला जा सकता है।

उदाहरण

(१) किसी समानान्तर चतुर्भुज का आधार ७ फी० ४ इञ्च और उसकी ऊँचाई ३ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल निकालो।

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल=आधार × लम्ब = ($७\frac{१}{३}$ × ३) व॰ फी॰
= $\frac{२२}{३}$ × $\frac{३}{१}$ व॰ फी॰ = २२ व॰ फी॰ ।

(२) किसी समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल २ एकड़ और उसका आधार २४२ गज है, तो उसकी उँचाई बताओ ।

समानान्तर चतुर्भुज की उँचाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{२ \times ४८४०}{२४२}$ गज
= ४० गज ।

(३) किसी समानान्तर चतुर्भुज का एक कर्ण ८ फी० ३ इञ्च और उस कर्ण पर सामने के कोण से लम्ब की लम्बाई ४ फी० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = कर्ण × उस कर्ण पर सामने के कोण से लम्ब = ($८\frac{१}{४}$ × ४) व० फी० = $\frac{३३}{४}$ × $\frac{४}{१}$ व० फी० = ३३ व० फी०

(४) एक समानान्तर चतुर्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल ३ एकड़ और उसका एक कर्ण ८८० गज है तो उस कर्ण पर सामने के कोण से लम्ब का मान बताओ ।

लम्ब की लम्बाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{कर्ण}} = \frac{३ \times ४८४०}{८८०}$ व० ग० = $\frac{३३}{२}$ व० ग०

= १६ व० ग० ४ व० फी० ७२ व० इ० ।

(५) किसी समानान्तर चतुर्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल ६ एकड़ है । यदि इसके एक कर्ण पर सामने के किसी कोण से लम्ब का मान ४४ गज हो, तो उस कर्ण की लम्बाई बताओ ।

कर्ण = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{सामने के कोण से उस कर्ण पर लंब}} = \frac{६ \times ४८४०}{४४}$ गज ।

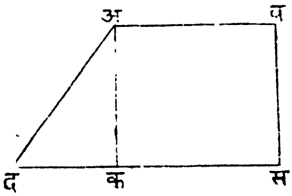
= ६६० गज ।

(६) अ व स द समानान्तर चतुर्भुज की अ व और व स भुजायें क्रम से १५ गज और १४ गज हैं । यदि अ स कर्ण १३ गज हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल =

$$२\sqrt{\frac{\text{यो}}{२}\left(\frac{\text{यो}}{२}-\text{अ व}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२}-\text{व स}\right)\left(\frac{\text{यो}}{२}-\text{अ स}\right)}$$

और दूसरी भुजा १३ फीट हो तो उसका क्षेत्रफल बताओ।



मान लिया कि अ ब स द एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें अ ब = १२ फी०, द स = १७ फी०, अ द = १३ फी०। द क = द स —क स = द स—अ ब = १७—१२ = ५ फी० अ ब, अ द क समकोण त्रिभुज में अक = $\sqrt{\text{अद}^2 - \text{दक}^2} = \sqrt{१३^2 - ५^2} = \sqrt{१६९ - २५} = \sqrt{१४४}$ = १२ फी० = समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी।

$\therefore$ अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ × १२ (१२ + १७) व॰ फी॰
= ६ × २९ व॰ फी॰ = १७४ व॰ फी॰।

(६) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें १५ फी० और १९ फी० हैं। यदि इसकी उँचाई ९ फी० हो, और इस उँचाई के मध्य विन्दु से दी हुई भुजाओं के समानान्तर एक तीसरी रेखा खींची जाय, तो इस तरह दो भागों में बँटे हुए समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ।

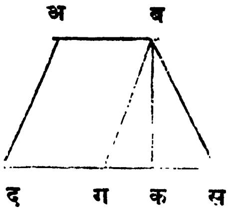
समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी को दो बरावर भागों में बाँटती हुई उन भुजाओं की समानान्तर रेखा, उन भुजाओं के योगार्ध के समान होती है, अतः वह रेखा = $\frac{१५+१९}{२} = \frac{३४}{२}$ = १७ फी०।

अब पहला समलम्ब चतुर्भुज दो समलम्ब चतुर्भुजों में बँट गया है, जिनकी समानान्तर भुजायें क्रम से १५ फीट, १७ फीट और १७ फीट, १९ फीट हैं। दोनों समलम्ब चतुर्भुज में समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी $\frac{९}{२}$ फीट है।

$\therefore$ पहला समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ (१५ + १७) × $\frac{९}{२}$ व० फी०
= $\frac{१६ \times ९}{२}$ व० फी० = ७२ व० फी०।

दूसरा समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ (१७ + १९) × $\frac{९}{२}$ व० फी०
= $\frac{१८ + ९}{२}$ व० फी० = ८१ व० फी०।

(७) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें ३० फीट और ४४ फीट तथा अन्य भुजायें १३ फीट और १५ फीट हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।



मान लिया कि अ ब स द एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें अ ब = ३० फीट, द स = ४४ फीट, अ द = १३ फीट और ब स = १५ फीट। ब बिन्दु से अ द के समानान्तर ब ग खींचा, तो अ ब ग द एक समानान्तर चतुर्भुज हुआ। ∴ अ ब = द ग = ३० फीट। दस−दग = दस−अब = गस = ४४−३० = १४ फी०। △ बगस में ब ग = १३ फीट, ब स = १५ फी०, ग स = १४ फीट।

∵ △ ब ग स का भुजयोगार्ध $= \frac{१३+१५+१४}{२} =$ २१ फी०।

∵ △ ब ग स का क्षेत्रफल $= \sqrt{२१\,(२१-१३)\,(२१-१५)\,(२१-१४)}$
$= \sqrt{२१ \times ८ \times ६ \times ७} = \sqrt{७ \times ३ \times २ \times ४ \times ३ \times २ \times ७} = \sqrt{७^२ \times ६^२ + २^२}$
$= ७ \times ६ \times २ = ८४$ व० फी०।

∴ △ ब ग स की ऊँचाई $= \frac{२\ \text{क्षे० फ०}}{\text{आधार}}\ \frac{२ \times ८४}{१४}$ फी० = १२ फी०, भी समलम्ब चतुर्भुज की भी ऊँचाई है।

∴ अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}\,(४४ + ३०) \times १२$ व० फी०
$= ७४ \times ६$ व० फी० = ४४४ व० फी०।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें १७ फी० और १९ फी० और उसकी ऊँचाई १३ फी० हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(२) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें ११ फी० ४३ इञ्च और १७ फी० ८ इञ्च हैं। यदि इन भुजाओं के बीच की दूरी ६ फी० हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(३) एक समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें ४ गज १ फी० ३ इञ्च और ५ गज २ फी० १ इञ्च हैं। यदि उन भुजाओं के बीच की दूरी १४ फी० हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(४) किसी समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ५५० व० फी० और उसकी समा-

नान्तर भुजायें ६४ फी० और ३६ फी० हैं, तो उन भुजाओं के बीच की दूरी बताओ।

(५) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार खेत का क्षेत्रफल ९०० व॰ ग॰ और उसकी उँचाई २० गज हैं। यदि समानान्तर भुजाओं का अन्तर ६ गज हो, तो उनकी लम्बाई अलग-अलग बताओ।

(६) एक समलम्ब चतुर्भुजाकार मैदान का क्षेत्रफल ४३ एकड़ है। यदि समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी १२० गज तथा समानान्तर भुजाओं में से एक १० गज हो, तो दूसरी समानान्तर भुजा बताओ।

(७) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार उद्यान की समानान्तर भुजायें ७४ गज और ३० गज हैं। यदि उन भुजाओं के बीच की दूरी १२० गज हो, तो उस उद्यान में प्रति वर्ग गज ४ आने की दर से पत्थर बिछाने का खर्च बताओ।

(८) एक समलम्ब चतुर्भुजाकार घर की समानान्तर भुजायें २० ग० और १७ ग० हैं। यदि उन भुजाओं की दूरी १६ गज हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(९) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें २८ फी० और १३ फी० हैं यदि तिरछी भुजाओं में से एक की लम्बाई १५ फी० और दूसरी भुजा समानान्तर भुजाओं के ऊपर लम्ब हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१०) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें १६ फी० और २४ फी० हैं। यदि उसकी उँचाई २० फी० हो, और उस उँचाई के मध्यविन्दु से समानान्तर भुजाओं के समानान्तर एक तीसरी रेखा खींची जाय, तो इस तरह दो भागों में बँटे हुए समलम्ब चतुर्भुज का अलग-अलग क्षेत्रफल बताओ।

(११) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार खेत का रकबा २ एकड़ है। यदि समानान्तर भुजाओं के बीच की दूरी २० गज हो, तो तिरछी भुजाओं के मध्यविन्दु की दूरी बताओ।

(१२) एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४७५ व॰ फी॰ और समानान्तर

भुजाओं के बीच की दूरी १९ फी० हैं। यदि उक्त भुजाओं का अन्तर ४ फी० हो, तो उनका मान अलग-अलग बताओ।

(१३) किसी समलम्ब चतुर्भुज में समानान्तर भुजाओं में से एक दूसरी से १ फुट बड़ी है। यदि उसकी उँचाई १ फुट और क्षेत्रफल २१६ व० इञ्च हो, तो प्रत्येक समानान्तर भुजा का मान बताओ।

(१४) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें ५५ फी० और ७७ फीट हैं। यदि उसकी शेष भुजायें २५ फीट और ३१ फी० हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१५) एक समलम्ब चतुर्भुजाकार रेल के प्लैटफॉर्म की समानान्तर भुजायें १०० फी० और १२० फी० हैं। यदि उसकी शेष दो भुजायें १५ फी० के बराबर हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१६) किसी समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें २८ गज और ८८ गज हैं। यदि उसकी शेष भुजायें ३४ गज और ४२ गज हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१७) एक समलम्ब चतुर्भुज की समानान्तर भुजायें ३० फीट और १४ फीट हैं। यदि शेष दो भुजायें १९ फीट और १२ फीट हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१८) किसी समलम्ब चतुर्भुजाकार खेत को चारो तरफ से घेरने में प्रति गज ३ आना की दर से ९० रु० खर्च होता है। यदि प्रति १० वर्ग गज ४ आ० की दर से उसकी मालगुजारी २६० रु० होती है, और यदि उसकी तिरछी भुजायें ११२ ग० और १०८ गज हैं, तो उस खेत की चौड़ाई बताओ।

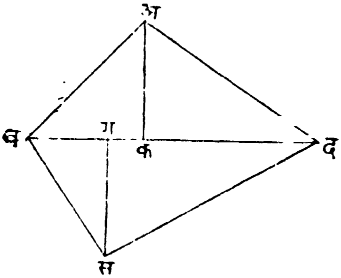
(१९) अ ब स द एक समलम्ब चतुर्भुजाकार खेत की अ ब भुजा = १८० फी०, ब स = २४० फीट, स द = ३६० फीट, द अ = १४४ फीट और अ स = ३२० फीट हैं तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

परिशिष्ट

सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

(१) इससे पहले समानान्तर चतुर्भुज के प्रमेयों एवं समलम्ब चतुर्भुज के

क्षेत्रफलों के विषय में कह कर अब सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफलानयन करते हैं। इस चतुर्भुज का नाम भास्कराचार्य ने विषम चतुर्भुज रखा है। उक्त चतुर्भुज का एक कर्ण और उस कर्ण पर सामने के कोणों से किये गये लम्ब ज्ञात हों, तो उसका क्षेत्र फल निम्न लिखित रूप से निकाला जाता है।



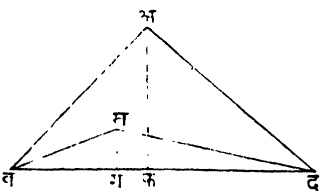
मान लिया कि अ ब स द एक चतुर्भुज है, जिसका एक कर्ण ब द है। ब द के ऊपर सामने के कोण ∠अ और ∠स से क्रम से अ क और स ग लम्ब हैं, तो चतुर्भुज अ ब स द का क्षेत्र फल = △ अ ब द + △ ब स द = $\frac{1}{2}$ अ क × ब द + $\frac{1}{2}$ स ग × ब द $\frac{1}{2}$ ब द (अ क + स ग)

= $\frac{1}{2}$ कर्ण (प्रथम लम्ब + द्वितीय लम्ब)............(१)

∴ कर्ण = $\frac{\text{२ क्षेत्र फल}}{\text{प्र· लम्ब + द्वि· लम्ब}}$ .... (२)

और प्र· लम्ब + द्वि· लम्ब = $\frac{\text{२ क्षेत्र फल}}{\text{कर्ण}}$ ....(३)

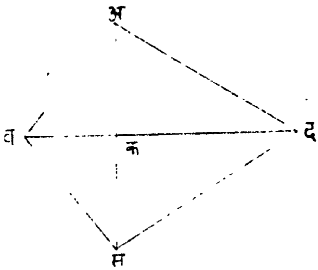
(२) ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसका एक कर्ण चतुर्भुज से बाहर हो।



अ ब स द चतुर्भुज में सम्मुख ∠ब और ∠द को मिलाने वाली ब द कर्ण-रेखा चतुर्भुज से बाहर है। अ क और स ग सामने के कोण ∠अ और ∠स से क्रम से उस कर्ण पर लम्ब गिराया। चतुर्भुज अ ब स द का क्षेत्रफल = Δ अ ब द − Δ ब स द = $\frac{1}{2}$ अ क × ब द − $\frac{1}{2}$ स ग × ब द = $\frac{1}{2}$ ब द (अ क − स ग) = $\frac{1}{2}$ कर्ण (लम्ब − लम्ब′)............(१)

(३) ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसके कर्ण परस्पर लम्ब हों।

मान लिया कि अ व स द चतुर्भुज के कर्ण अ स और व द एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \triangle$ अ व द $+ \triangle$ व स द $= \frac{1}{2}$ व द $\times$ अ क $+ \frac{1}{2}$ व द $\times$ स क $= \frac{1}{2}$ व द (अ क $+$ स क) $= \frac{1}{2}$ व द $\times$ अ स $= \frac{1}{2}$ प्र० कर्ण $\times$ द्वि· कर्ण$\cdots$(१)



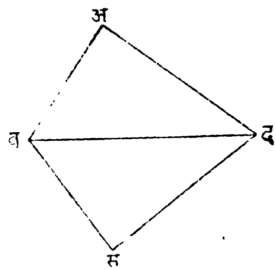
(४) ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी चारों भुजायें ज्ञात हों और जिसका एक कोण समकोण हो।

मान लिया कि अ व स द चतुर्भुज की चारों भुजायें मालूम हैं और $\angle$ व अ द $= ९०^\circ$

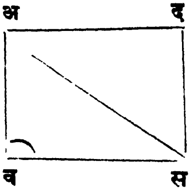
$\because \angle$ व अ द $= ९०^\circ$, $\therefore$ कर्ण व द $= \sqrt{\text{अ व}^2 + \text{अ द}^2}$ ।

अ व स द चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \triangle$ अ व द $+ \triangle$ व स द । परन्तु $\triangle$ अ व द $= \frac{1}{2}$ अ व $\times$ अ द, तथा व स द त्रिभुज का भुजयोग $=$ यो, तो 'सर्वदोर्युतिदलं' इस सूत्र के अनुसार उक्त त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{\frac{\text{यो}}{2}\left(\frac{\text{यो}}{2} - \text{वस}\right)\left(\frac{\text{यो}}{2} - \text{सद}\right)\left(\frac{\text{यो}}{2} - \text{दव}\right)}$

$\therefore$ उक्त दोनों त्रिभुजों के क्षे· फ· का योग $=$ अभीष्ट चतुर्भुज का क्षेत्रफल ।



(५) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी तीन भुजायें मालूम हों तथा दो ज्ञात भुजाओं के बीच का कोण और उस कोण के सामने का कोण समकोण हों। मान लिया कि अ व स द एक चतुर्भुज है, जिसकी अ व, व स और स द भुजायें ज्ञात हैं, तथा $\angle$ अ व स $= ९०^\circ = \angle$ स द अ ।



त्रिभुज अ ब स में कर्ण अ स = $\sqrt{\text{अ ब}^{२} + \text{ब स}^{२}}$
अब त्रिभुज अ द स में ∠अ द स = ९०°,
∴ अ द = $\sqrt{\text{अ स}^{२} - \text{स द}^{२}}$ । इस तरह उक्त चतुर्भुज की चारो भुजायें तथा एक कर्ण मालूम हो गये अतः उसका क्षेत्रफल आसानी से निकल सकता है ।

उदाहरण

(१) किसी चतुर्भुज का कर्ण १५ फीट और उस कर्ण पर सामने के कोणों से लम्ब के मान ११ फी० और ९ फी० हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ कर्ण × उस कर्ण पर सामने के कोणों से लम्बों का योग = $\frac{१}{२}$ × १५ × (११ + ९) व· फी· = $\frac{\text{१५} \times \text{२०}}{\text{२}}$ व· फी·
= १५ × १० व· फी· = १५० व· फी· ।

(२) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४८००० व· ग· और एक कर्ण पर सामने के कोणों से लम्ब २६५ गज और १३५ गज हैं, तो उस कर्ण की लम्बाई बताओ ।

कर्ण = $\frac{\text{२ क्षेत्रफल}}{\text{सामने के कोणों से उस कर्ण पर लम्बों का योग}}$ $\frac{\text{२} \times \text{४८०००}}{\text{२६५} + \text{१३५}}$ ग०
= $\frac{\text{२} \times \text{४८०००}}{\text{४००}}$ ग० = २४० ग० ।

(३) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४ एकड़ और उसका एक कर्ण ४८४ गज है । यदि उस कर्ण पर सामने के कोणों से लम्बों का अन्तर २ गज हो, तो उन लम्बों का मान अलग-अलग बताओ ।

लम्बों का योग = $\frac{\text{२ क्षेत्रफल}}{\text{कर्ण}}$ = $\frac{\text{२} \times \text{४} \times \text{४८४०}}{\text{४८४}}$ गज = २ × ४ × १० ग०
= ८० गज । लम्बों का अन्तर = २ गज,
∴ एक लम्ब = $\frac{\text{८०} + \text{२}}{\text{२}}$ = ४१ गज, और दूसरा लम्ब = $\frac{\text{८०} - \text{२}}{\text{२}}$ = ३९ गज ।

(४) किसी चतुर्भुज के उस कर्ण की लम्बाई, जो उसके घेरे से बाहर पड़ता है, २५ गज है और सामने के कोणों से उस कर्ण पर किये गये लम्बों का अन्तर १४ ग० है, तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ ।

क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ कर्ण × सामने के कोणों से उस कर्ण पर लम्बों का अन्तर
= $\frac{१}{२}$ × २५ × १४ व॰ ग॰ = २५ × ७ व॰ ग॰ = १७५ व॰ ग॰ ।

(५) किसी चतुर्भुज के दोनों कर्ण २६ गज और १८ गज़ हैं । यदि वे दोनों परस्पर लम्ब रूप हों, तो उसका क्षेत्रफल बताओ ।

क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ कर्णों के घात = $\frac{१}{२}$ × २६ × १८ व॰ ग॰ = २६ × ९ व॰ ग॰
= २३४ व॰ ग॰ ।

(६) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\frac{१}{३}$ एकड़ है । यदि उसके परस्पर लम्ब रूप कर्णों में से एक ३३ गज हो, तो दूसरा कर्ण बताओ ।

दूसरा कर्ण = $\frac{२ \text{ क्षेत्रफल}}{\text{एक कर्ण}} = \frac{\frac{२}{३} \times ४८४०}{३३}$ ग॰ = $\frac{४८४०}{३ \times ३३}$ ग॰

= $\frac{४४०}{९}$ ग॰ = ४८ ग॰ २ फी॰ ८ इञ्च ।

(७) अ ब स द चतुर्भुज की अ ब, ब स, स द और द अ भुजायें क्रम से २८ ग॰, ४५ ग॰, ५१ ग॰ और ५२ ग॰ हैं । यदि उसका कर्ण अ स = ५३ ग॰, तो क्षेत्रफल बताओ ।

△अ ब स की भुजायें २८, ४५ और ५३ गज हैं, अतः भुजयोगार्ध = $\frac{२८+४५+५३}{२} = \frac{१२६}{२}$ = ६३ गज, तथा △ अ द स की भुजायें ५१, ५२ और ५३ गज हैं, अतः भुजयोगार्ध = $\frac{५१+५२+५३}{२}$ = ७८ गज ।

∴ अ ब स त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{६३ (६३ - २८) (६३ - ४५) (६३ - ५३)}$ व॰ ग॰ = $\sqrt{६३ \times ३५ \times १८ \times १०}$ व॰ ग॰ = $\sqrt{९ \times ७ \times ७ \times ५ \times ९ \times २ \times २ \times ५}$ व॰ ग॰ = ९ × ७ × ५ × २ व॰ ग॰ = ६३० व॰ ग॰ ।

अ द स त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{७८ (७८ - ५१) (७८ - ५२) (७८ - ५३)}$ व॰ ग॰ = $\sqrt{७८ \times २७ \times २६ \times २५}$ व॰ ग॰ = $\sqrt{२६ \times ३ \times ३ \times ९ \times २६ \times ५ \times ५}$ व॰ ग॰ = २६ × ९ × ५ व॰ ग॰ = ११७० व॰ ग॰ ।

∴ अभीष्ट चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (६३० + ११७०) व॰ ग॰ = १८०० व॰ ग॰ ।

(८) अ ब स द चतुर्भुज की अ ब, ब स, स द और द अ भुजायें क्रम से ५ इञ्च, १२ इञ्च, १४ इञ्च और १५ इञ्च हैं । यदि ∠अ ब स = ९०°

तो उसका क्षेत्रफल बताओ। अ स को मिलाया, तो अ व स एक समकोण त्रिभुज है।

$\therefore$ अ स $= \sqrt{\text{अ व}^2 + \text{व स}^2} = \sqrt{५^2 + १२^2}$ इञ्च $= १३$ इञ्च।

अ व स द चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \Delta$ अ व स $+ \Delta$ अ द स, लेकिन

Δ अ व स का क्षेत्रफल $= \frac{१}{२} \times ५ \times १२$ व॰ इ॰ $= ३०$ व इ॰।

Δ अ द स का भुजयोग $= १३ + १४ + १५ = ४२$ इञ्च।

Δ अ द स का क्षेत्रफल $= \sqrt{२१(२१ - १३)(२१ - १४)(२१ - १५)}$ व॰ इ॰

$= \sqrt{२१ \times ८ \times ७ \times ६}$ व॰ इ॰ $= \sqrt{७ \times ३ \times २ \times ४ \times ७ \times ३ \times २}$ व॰ इ॰

$= \sqrt{७^2 \times ६^2 \times २^2}$ व॰ इ॰ $= ७ \times ६ \times २$ व॰ इ॰ $= ८४$ व॰ इ॰।

$\therefore$ अभीष्ट चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= (३० + ८४)$ व॰ इ॰ $= ११४$ व॰ इ॰।

(९) अ व स द चतुर्भुज की अ व, व स और अ द भुजायें क्रम से ५१ ग॰, ४० ग॰ और ६८ ग॰ हैं। यदि $\angle$ व अ द $= ९०^\circ = \angle$ व स द, है तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

$\therefore$ व अ द एक समकोण त्रिभुज है, $\therefore$ व द $= \sqrt{\text{अ व}^2 + \text{अ द}^2}$ $= \sqrt{५१^2 + ६८^2} = \sqrt{२६०१ + ४६२४} = \sqrt{७२२५} = ८५$ ग॰। अ व, व स द समकोण त्रिभुज में स द $= \sqrt{\text{व द}^2 - \text{व स}^2} = \sqrt{८५^2 - ४०^2}$ $= \sqrt{(८५ + ४०)(८५ - ४०)} = \sqrt{१२५ \times ४५} = \sqrt{१२५ \times ५ \times ९}$ $= \sqrt{६२५ \times ९} = २५ \times ३ = ७५$ ग॰।

$\therefore$ अ व स द चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \Delta$ अ व द $+ \Delta$ स द व $= \frac{१}{२}$ अ व $\times$ अ द $+ \frac{१}{२}$ व स $\times$ स द $= (\frac{१}{२} \times ५१ \times ६८ + \frac{१}{२} \times ४० \times ७५)$ व॰ ग॰ $= (५१ \times ३४ + २० \times ७५$ व॰ ग॰ $= (१७३४ + १५००)$ व॰ ग॰ ३२३४ व॰ ग॰।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) किसी चतुर्भुज का एक कर्ण २५ गज और सामने के कोणों से इस कर्ण पर किये गये लम्ब ५ गज और ८ गज हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(२) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ६२५ व॰ ग॰ और सामने के कोणों से एक कर्ण पर किये गये लम्ब २५ गज और २० गज हैं, तो उस कर्ण की

(३) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\frac{3}{2}$ एकड़ है, और सामने के कोणों से किसी कर्ण पर किये गये लम्ब १० ग० और २४ ग० हैं तो वह कर्ण बताओ।

(४) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ७५० व० फी० है। यदि उसका एक कर्ण १०० फी० और सामने के कोणों से उस कर्ण पर किये गये लम्बों में एक दूसरे से दूना हो, तो उनका मान अलग-अलग बताओ।

(५) एक समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ३७५ व० ग० और उसका एक कर्ण २५ ग० है। यदि उस कर्ण पर सामने के कोणों से किये गये लम्बों का अन्तर ४ गज हो, तो उनका मान अलग-अलग बताओ।

(६) किसी चतुर्भुज का एक कर्ण, जो उनके घेरे से बाहर है, ३० ग० है। यदि सामने के कोणों से उस कर्ण पर किये गये लम्बों का अन्तर १४ ग० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(७) किसी चतुर्भुज का एक कर्ण, जो उसके घेरे से बाहर पड़ता है, ७० फी० और सामने के कोणों से उस कर्ण पर किये गये लम्बों का अन्तर १६ फी० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(८) किसी चतुर्भुज का एक कर्ण जो उसके घेरे से बाहर पड़ता है, ३० ग० और सामने के कोणों से उस कर्ण पर किये गये लम्बों का अन्तर ३ ग० हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(९) एक चतुर्भुज के कर्ण १२ फी० और १३ फी० हैं। यदि वे परस्पर लम्ब हों, तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ।

(१०) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ३७५० व० ग० और उसका एक कर्ण ७५ ग० है। यदि दोनों कर्ण परस्पर लम्ब हों, तो दूसरे कर्ण का मान बताओ।

(११) एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४८०० व० ग० है। यदि उसके कर्ण आपस में लम्बरूप हों और उनका अन्तर ४० गज हो, तो उनका मान अलग-अलग बताओ।

(१२) अ ब स द चतुर्भुज की भुजायें अ ब, ब स, स द और द अ क्रम से २५ फी० ६० फी० ५२ फी० और ३९ फी० तथा कर्ण अ स ६५ फी० हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१३) किसी चतुर्भुज की भुजायें ९, ४०, २८ और १५ ग० हैं। यदि पहली दो भुजाओं के बीच का कोण समकोण हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१४) किसी चतुर्भुज की भुजायें ५, १२, १४ और १५ फी० हैं। यदि पहली दो भुजाओं से बना हुआ कोण समकोण हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१५) अ ब स द चतुर्भुज की अ ब, स द और द अ भुजायें क्रम से ११२, १७५ और १०५ फी० हैं। यदि ∠अ ब स = ९०° = ∠द अ स हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१६) अ ब स द चतुर्भुज में ∠ब और ∠द प्रत्येक समकोण है। यदि अ ब, ब स और स द भुजायें क्रम से ३६ फी०, ७७ फी० और ६८ फी० हैं, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

अथ सूचीक्षेत्रोदाहरणम्

क्षेत्रे यत्र शतत्रयं क्षितिमितिस्तत्रेन्दुतुल्यं मुखं,
बाहू खोत्कृतिभिः शरातिधृतिभिस्तुल्यौ च तत्र श्रुती।
एका खाष्टयमैः समा तिथिगुणैरन्याऽथ तल्लम्बकौ,
तुल्यौ गोधृतिभिस्तथा जिनयमैर्योगाच्छ्रुवो लम्बयोः॥
तत्खण्डे कथयाधरे श्रवणयोर्योगाच्च लम्बावधे,
तत्सूची निजमार्गवृद्धभुजयोर्योगाद्यथा स्यात्ततः।
स्वाबाधं वद लम्बक च भुजयोः सूच्याः प्रमाणे च के,
सर्वं गाणितिक प्रवदत्र नितरां क्षेत्रेऽत्र दक्षोऽसि चेत्॥

जिस क्षेत्र में भूमि ३००, मुख १२५, प्रथम भुज २६०, द्वितीय भुज १९५, प्रथम कर्ण २८०, द्वितीय कर्ण ३१५, प्रथम लम्ब १८९ और द्वितीय लम्ब २२४ हैं, तो कर्ण और लम्ब के योग से उसके नीचे के दोनों खण्डों का प्रमाग एवं दोनों कर्ण के योग से लम्ब और आबाधाओं के मान तथा भुजों को अपने मार्ग में बढ़ाने से जहाँ योग होगा, वहाँ से भूमि पर आबाधा सहित लम्ब के मान एवं सूची क्षेत्र का प्रमाण बताओ।

अथ सन्ध्याद्यानयनाय करणसूत्रं वृत्तद्वयम्।

लम्बतदाश्रितबाह्वोर्मध्यं सन्ध्याख्यमस्य लम्बस्य।
सन्ध्यूना भूः पीठं साध्यं यस्याधरं खण्डम्॥ ३४॥

तत्सन्धिर्द्विष्ठः परलम्बश्रवणहतः परस्य पीठेन ।
भक्तो लम्बश्रुत्योर्योगात्स्यातामधः खण्डे ॥ ३५ ॥

लम्बतदाश्रितबाह्वोः मध्यं अस्य लम्बस्य सन्ध्याख्यम् । सन्ध्यूनाभूः पीठं, यस्य अधरं खण्डं साध्यं अस्ति तत्सन्धिः द्विष्ठः, परलम्बश्रवणहतः, परस्य पीठेन भक्तः, लम्बश्रुत्योः योगात् अधः खण्डे स्याताम् ।

लम्ब और उसको स्पर्श करने वाली भुजा के बीच का खण्ड, उस लम्ब की सन्धि कहलाता है । सन्धि को भूमि में घटाने से पीठ होती है, जिसका अधः खण्ड साधन करना हो, उसकी सन्धि को दो जगह रख कर एक को पर-लम्ब से और दूसरे को पर कर्ण से गुणा कर दूसरे की पीठ से दोनों जगह भाग दें, तो लम्ब और कर्ण के योग से नीचे के खण्ड होते हैं ।

न्यासः । लम्बः १८६ तदाश्रितभुजः १६५ । अनयोर्मध्ये यल्लम्बलम्बाश्रितबाहुवर्गेत्यादिनागताऽऽबाधा सन्धिसंज्ञा ४८ । तदूनितभूरिति द्वितीयाबाधा सा पीठसंज्ञा २५२ । एवं द्वितीयलम्बः २२४ । तदाश्रितभुजः २६० पूर्ववत् सन्धिः १३२ । पीठम् १६८ ।

अथाद्यलम्बस्याधः १८६ खण्डं साध्यम् । अस्य सन्धिः ४८ । द्विष्ठः ४८ । परलम्बेन २२४ । श्रवणेन च २८० । पृथग्गुणितः १०७५२ । १३४४० । परस्य पीठेन १६८ । भक्तो लब्धं लम्बाधः खण्डम् ६४ । श्रवणाधः खण्डं च ८० । एवं द्वितीयलम्बस्य २२४ सन्धिः १३२ । परलम्बेन १८६ कर्णेन च ३१५ । पृथग्गुणितः परस्य पीठेन २५२ । भक्तो लब्धं लम्बाधः खण्डं ६६ । श्रवणाधः खण्डं च १६५ ;

उदाहरण—लम्ब १८९ और उसके आश्रित भुज १९५ का 'यल्लम्बलम्बाश्रित बाहुवर्ग' इस सूत्र से वर्गान्तर मूल ४८ = प्रथम सन्धि । इसको भूमि ३०० में घटाने से (३००−४८ =) २५२ प्रथम पीठ हुई । इसी प्रकार दूसरे लम्ब २२४ और तदाश्रित भुज २६० पर से द्वितीय सन्धि १३२ और द्वितीय पीठ १६८ हुई । यहाँ प्रथम लम्ब १८९ का अधः खण्ड साधन करना है, अतः इसकी सन्धि ४८ को दो जगह रख कर एक जगह पर लम्ब २२४ से और दूसरी जगह पर कर्ण २८० से गुणा कर दोनों जगह में पर पीठ १६८ से भाग देने पर लम्ब का अधः खण्ड = $\frac{४८ \times २२४}{१६८}$ = ६४ और कर्ण का अधः खण्ड

$= \frac{४८४२८०}{१६८} = ८०$ हुये । इसी तरह द्वितीय सन्धि १३२ को प्रथम लम्ब १८९ से गुणा कर प्रथम पीठ २५२ से भाग देने पर ९९ द्वितीय लम्ब का अधः खण्ड हुआ । एवं द्वितीय सन्धि १३२ को प्रथम कर्ण ३१५ से गुणा कर प्रथम पीठ २५२ से भाग देने पर कर्ण का अधः खण्ड १६५ हुआ ।

अथ कर्णयोर्योगादधो लम्बज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तम्

लम्बौ भूघ्नौ निजनिजपीठविभक्तौ च वंशौ स्तः ।
ताभ्यां प्राग्वच्छ्रुत्योर्योगाल्लम्बः कुखण्डे च ॥ ३६ ॥

भूघ्नौ लम्बौ निजनिजपीठविभक्तौ च वंशौ स्तः ताभ्यां श्रुत्योः योगात् लम्बः कुखण्डे च प्राग्वत् साध्ये ।

दोनों लम्बों को भूमि से गुणा कर अपनी-अपनी पीठ से भाग दें, तो वंशों का प्रमाण होता है । उन दोनों वंशों पर से 'अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगात् इत्यादि उक्त रीति से कर्णों के योग से भूमि पर लम्ब और आबाधाओं का ज्ञान करना चाहिये ।

लम्बौ १८९ । २२४ । भू ३०० घ्नौ जातौ ५६७०० । ६७२०० । स्वस्वपीठाभ्यां २५२ । १६८ भक्तौ एवमत्र लब्धौ वंशौ २२५ । ४०० । आभ्यामन्योऽन्यमूलाग्रगसूत्रयोगादित्यादिकरणेन लब्धः कर्णयोगादधो लम्बः १४४ । भूखण्डे च १०८ । १९२ ।

उदाहरण—प्रथम लम्ब १८९ को भूमि ३०० से गुणा कर अपनी पीठ २५२ से भाग देने पर प्रथम वंश = २२५ हुआ, एवं द्वितीय लम्ब २२४ को भूमि ३०० से गुणा कर अपनी पीठ १६८ से भाग देने पर द्वितीय वंश ४०० हुआ । इन दोनों वंशों से 'वेण्वोर्वधे योगहृतेऽवलम्बः' इस सूत्र से दोनों वंशों के घात २२५ × ४०० = ९०००० को वंशद्वय के योग ६२५ से भाग दिया, तो १४४ कर्णयोग से भूमि पर लम्ब हुआ । अब 'अभीष्टभूघ्नौ वंशौ' इसके अनुसार दोनों वंशों को इष्ट भूमि ३०० से गुणा कर वंशों के योग ६२५ से भाग देने पर क्रम से प्रथम आबाधा $= \frac{२२५ \times ३००}{६२५} = १०८$, और दूसरी आबाधा $= \frac{४०० \times ३००}{६२५} = १९२$ ।

अथ सूच्याबाधालम्बभुजज्ञानार्थं सूत्रं वृत्तद्वयम् ।

लम्बहृतो निजसन्धिः परलम्बगुणः समाह्वयो ज्ञेयः ।
समपरसन्ध्योरैक्यं हारस्तेनोद्धृतौ तौ च ॥ ३७ ॥
समपरसन्धी भूघ्नौ सूच्याबाधे पृथक् स्याताम् ।
हारहृतः परलम्बः सूचीलम्बो भवेद्भूघ्नः ॥ ३८ ॥
सूचीलम्बघ्नभुजौ निजनिजलम्बोद्धृतौ भुजौ सूच्याः ।
एवं क्षेत्रक्षोदः प्राज्ञैस्त्रैराशिकात् क्रियते ॥ ३९ ॥

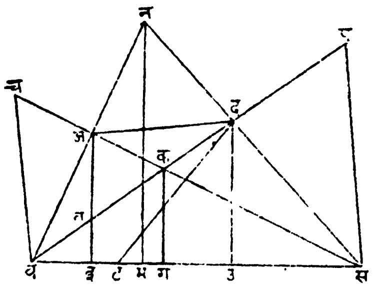
निजसन्धिः परलम्बगुणः लम्बहृतः समाह्वयः ज्ञेयः । समपरसन्ध्योः ऐक्यं हारः स्यात् । तौ समपरसन्धी भूघ्नौ तेन शरेण उद्धृतौ च तदा सूच्याबाधे पृथक् स्याताम् । परलम्बः भूघ्नः हारहृतः सूचीलम्बः भवेत् । सूचीलम्बघ्नभुजौ निजनिज-लम्बोद्धृतौ सूच्याः भुजौ भवतः । प्राज्ञैः एवं क्षेत्रक्षोदः त्रैराशिकात् क्रियते ।

अपनी सन्धि को परलम्ब से गुणा कर अपने लम्ब से भाग देने पर जो लब्धि हो उसका नाम सम होता है । सम और परसन्धि का योग हार होता है । सम और परसन्धि को अलग-अलग भूमि से गुणा कर दोनों में हार से भाग देने पर दोनों लब्धि, सूची की आबाधायें होती हैं । परलम्ब को भूमि से गुणा कर हार से भाग देने पर सूची-लम्ब होता है। दोनों भुजाओं को सूची लम्ब से गुणा कर अपने २ लम्ब से भाग दें, तो सूची की भुजायें होती हैं । इस तरह बुद्धिमान् क्षेत्रावयवों का ज्ञान त्रैराशिक से करते हैं ।

अत्र किलायं लम्बः २२४ । अस्य सन्धिः १३२ । अयं परलम्बेन १८९ गुणितो २२४ ऽनेन भक्तो जातः समाह्वयः $\frac{८९१}{८}$ । अस्य परस-न्धेश्च ४८ योगो हारः $\frac{१२७५}{८}$ । अनेन भूघ्नः ३०० समः $\frac{२६७३००}{८}$ पर-सन्धिश्च $\frac{१४४००}{१}$ भक्तौ जाते सूच्याबाधे $\frac{३५६४}{१७}$ । $\frac{१५३६}{१७}$ । एवं द्वितीय-समाह्वयः $\frac{५१२}{९}$ । द्वितीयो हारः $\frac{१७००}{९}$ । अनेन भूघ्नः स्वीयः समः $\frac{१५३६००}{९}$ परसन्धिश्च $\frac{३९६००}{१}$ । भक्तो जाते सूच्याबाधे $\frac{१५३६}{१७}$ । $\frac{३५६४}{१७}$ परलम्बः २२४ भूमि ३०० गुणो हारेण $\frac{१७००}{९}$ भक्तो जातः सूचीलम्बः $\frac{६०४८}{१७}$ । सूचीलम्बेन भुजौ १९५ । २६० । गुणितौ स्वस्वलम्बाभ्यां १८९ । २२४ यथाक्रमं भक्तौ जातौ स्वमार्गे वृद्धौ सूचीभुजौ $\frac{६२४०}{१७}$ । $\frac{७०२०}{१७}$ । एवमत्र सर्वत्र भागहारराशिप्रमाणम् । गुण्यागुणकौ तु यथा-योग्यं फलेच्छे प्रकल्प्य सुधिया त्रैराशिकमुह्यम् ।

उदाहरण—लम्ब २२४ की सन्धि १३२ को परलम्ब १८९ से गुणा क अपने लम्ब २२४ से भाग दिया तो सम $\frac{८९१}{८}$ हुआ। इसमें परसन्धि १४ को जोड़ने पर $\frac{१२७५}{८}$ हार हुआ। सम $\frac{८९१}{८}$ और पर सन्धि ४८ को भूमि ३०० से गुणा कर दोनों जगह हार से भाग देने पर क्रम से $\frac{८९१\times३००}{८}\div\frac{१२७५}{८}$ $=\frac{३५६४}{१७}$ प्र० आबाधा और द्वि० आबाधा $=\frac{४८\times३००\times८}{१२७५}=\frac{१५३६}{१७}$ हुई। इसी तरह दूसरे लम्ब १८९ की सन्धि ४८ को परलम्ब २२४ से गुणा कर अपने लम्ब १८९ से भाग देने पर $\frac{५१२}{९}$ दूसरा सम हुआ। इसको परसन्धि १३२ में जोड़ने से दूसरा हार $\frac{१७००}{९}$ हुआ। अब सम और पर सन्धि को भूमि से गुणा कर हार से भाग देने पर क्रम से प्र० आबाधा$=\frac{५१२}{९}\times\frac{३००\times९}{१७००}$ $=\frac{१५३६}{१७}$ और द्वि० आबाधा $=\frac{१३२\times३००\times९}{१७००}=\frac{३५६४}{१७}$। अब परलम्ब २२४ को भूमि ३०० से गुणा कर हार $\frac{१७००}{९}$ से भाग देने पर सूची लम्ब $=\frac{२२४\times३००\times९}{१७००}=\frac{६०४८}{१७}$। अब भुज १९५ और २६० को सूची लम्ब $\frac{६०४८}{१७}$ से गुणा कर अपने २ लम्ब १८९ और २२४ से भाग देने पर स्वमार्ग वर्द्धित सूची का प्रथम भुज $=\frac{१९५\times६०४८}{१७\times१८९}=\frac{६२४०}{१७}$ और द्वितीय भुज $=\frac{२६०\times६०४८}{१७\times२२४}=\frac{७०२०}{१७}$। इस तरह बुद्धिमान उक्त रीतियों में हार को प्रमाण और गुण्य को फल एवं गुणक को इच्छा मान कर त्रैराशिक द्वारा सूची-क्षेत्र को सिद्ध करें।

अत्रोपपत्तिः—



अत्र अ ब द स चतुर्भुजम् ब द, अ स कर्णौ, अ इ = प्र० लम्बः। द उ = द्वि० लम्बः। ब इ=आ सन्धिः। स इ=प्र० पीठम्। स उ=द्वि० सन्धिः। ब उ = द्वि० पीठम्। अथ ब त इ, ब द उ त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन

ब उ

: $\frac{\text{कर्ण}\times\text{आ० स०}}{\text{द्वि० पी०}}$। एवं त इ

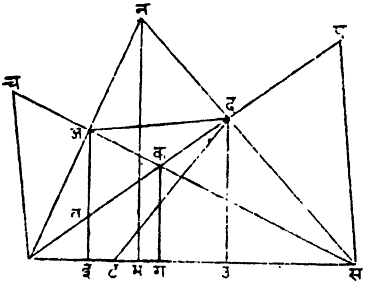
$= \frac{\text{द उ} \times \text{व इ}}{\text{व उ}} = \frac{\text{अ· लम्ब} \times \text{आ· सं·}}{\text{द्वि· पी·}}$ एतेन 'सन्धिर्द्वितः परलम्बश्रवणहतः परस्य पीठेनभक्तः' इति सूत्रमुपपन्नम्। अथ व, स बिन्दोः वसभूम्युपरि व च, स प लम्बौ विधाय व द् स अ कर्णौ क्रमेण प च पर्यन्तं वर्धनीयौ। अथ व स च, स अ इ त्रिभुजौ जातौ। अनयोः साजात्यादनुपातेन $\text{व च} = \frac{\text{अ इ} \times \text{व स}}{\text{स इ}} =$ $\frac{\text{प्र·लं} \times \text{भूमि}}{\text{प्र·पी}}$। एवं व स प, व उ द त्रिभुजयोः साजात्यतोऽनुपातेन—स प $= \frac{\text{द उ} \times \text{व स}}{\text{व उ}} = \frac{\text{द्वि·लं} \times \text{भू}}{\text{द्वि·पी·}}$। तत आभ्यां वंशाभ्यां अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगादित्यादिना क ग लम्बस्तथा व ग, स ग आबाधे साधनीये, तेन लम्बौ भूघ्नौ निजनिजपीठविभक्ताविति सूत्रमुपपद्यते। अथ द बिन्दोः अ व समानान्तरा द ट रेखा विधेया तदा अ व इ, द ट उ त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन $\text{ट उ} = \frac{\text{व इ} \times \text{द उ}}{\text{अ इ}} = \frac{\text{आ·सं} \times \text{द्वि० लं}}{\text{प्र·लं·}} = \text{स म}$। $\text{ट उ} + \text{उ स} = \text{ट स} = \text{द्वि· सं·} + \text{स म} = \text{हारः}$। अथ स द ट, स ग व त्रिभुजौ सजातीयौ ततः षष्ठाध्यायेन $\frac{\text{व ट}}{\text{स ट}} = \frac{\text{ट न}}{\text{स द}}$। परञ्च $\frac{\text{द न}}{\text{स द}} = \frac{\text{म उ}}{\text{उ स}}$, अतः $\frac{\text{व ट}}{\text{स ट}} = \frac{\text{म उ}}{\text{उ स}}$। $\therefore \frac{\text{व ट}}{\text{स ट}} + 1 = \frac{\text{म उ}}{\text{उ स}} + 1$। $\therefore \frac{\text{वट} + \text{सट}}{\text{स ट}} = \frac{\text{म उ} + \text{उ स}}{\text{उ स}}$। $\therefore \frac{\text{व स}}{\text{स ट}} = \frac{\text{म स}}{\text{उ स}}$। $\therefore$ सम = स म $= \frac{\text{व स} \times \text{उ स}}{\text{स ट}} = \frac{\text{भू} \times \text{द्वि·सं}}{\text{हा}} = \text{सूची प्र· आ·}$। एवमेव द्वि· आबा $= \frac{\text{भू} \times \text{प्र·सं}}{\text{हा}}$। लम्बः $= \frac{\text{द उ} \times \text{स न}}{\text{सट}} = \frac{\text{द्वि·लं} \times \text{भू}}{\text{हा}}$ एवं ब स $= \frac{\text{द स} \times \text{व न}}{\text{द उ}} =$ $\frac{\text{प्र भु} \times \text{सू लं.}}{\text{प्र लं.}} = \text{सूची भुजः}$। एवं सू· द्वि· भु· $= \frac{\text{द्वि·भु} \times \text{सू·लं}}{\text{द्वि·लं}}$। अतउपपन्नं सर्वम्।

अथ वृत्तक्षेत्रे करणसूत्रं वृत्तम्

व्यासे भनन्दाग्नि हते विभक्ते खबाणसूर्यैः परिधिः स सूक्ष्मः।

उदाहरण—लम्ब २२४ की सन्धि १३२ को परलम्ब १८९ से गुणा कर अपने लम्ब २२४ से भाग दिया तो सम $\frac{८९१}{८}$ हुआ। इसमें परसन्धि १४८ को जोड़ने पर $\frac{२०७५}{८}$ हार हुआ। सम $\frac{८९१}{८}$ और पर सन्धि ४८ को भूमि ३०० से गुणा कर दोनों जगह हार से भाग देने पर क्रम से $\frac{८९१ \times ३०० \times ८}{८ \times १२०७५}$ $= \frac{३५६४}{१७}$ प्र· आबाधा और द्वि· आबाधा $= \frac{४८ \times ३०० \times ८}{१२०७५} = \frac{१५३६}{१७}$ हुई। इसी तरह दूसरे लम्ब १८९ की सन्धि ४८ को परलम्ब २२४ से गुणा कर अपने लम्ब १८९ से भाग देने पर $\frac{५१२}{९}$ दूसरा सम हुआ। इसको परसन्धि १३२ में जोड़ने से दूसरा हार $\frac{१७००}{९}$ हुआ। अब सम और पर सन्धि को भूमि से गुणा कर हार से भाग देने पर क्रम से प्र· आबाधा$= \frac{५१२}{९} \times \frac{३०० \times ९}{१७००}$ $= \frac{१५३६}{१७}$ और द्वि· आबाधा $= \frac{१३२ \times ३०० \times ९}{१७००} = \frac{३५६४}{१७}$। अब परलम्ब २२४ को भूमि ३०० से गुणा कर हार $\frac{१७००}{९}$ से भाग देने पर सूची लम्ब $= \frac{२२४ \times ३०० \times ९}{१७००} = \frac{६०४८}{१७}$। अब भुज १९५ और २६० को सूची लम्ब $\frac{६०४८}{१७}$ से गुणा कर अपने २ लम्ब १८९ और २२४ से भाग देने पर स्वमार्ग वर्द्धित सूची का प्रथम भुज $= \frac{१९५ \times ६०४८}{१७ \times १८९} = \frac{६२४०}{१७}$ और द्वितीय भुज $= \frac{२६० \times ६०४८}{१७ \times २२४} = \frac{७०२०}{१७}$। इस तरह बुद्धिमान उक्त रीतियों में हार को प्रमाण और गुण्य को फल एवं गुणक को इच्छा मान कर त्रैराशिक द्वारा सूची-क्षेत्र को सिद्ध करें।

अत्रोपपत्तिः—



अत्र अ ब द स चतुर्भुजम् ब द, अ स कर्णौ, अ इ = प्र· लम्बः। द उ = द्वि० लम्बः। ब इ=आ सन्धिः। स इ=प्र· पीठम्। स उ=द्वि· सन्धिः। ब उ = द्वि· पीठम्। अथ ब त इ, ब द उ त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन

$$ब\ त = \frac{ब\ द \times ब\ इ}{ब\ उ}$$

$$= \frac{कर्ण \times आ·\ स}{द्वि·\ पी}$$ । एवं त इ

$= \frac{\text{द उ} \times \text{व इ}}{\text{व उ}} = \frac{\text{अ· लम्ब} \times \text{आ· सं·}}{\text{द्वि· पी·}}$ - एतेन 'सन्धिर्द्वितीयः परलम्बश्रवणहतः परस्य पीठेनभक्तः' इति सूत्रमुपपन्नम् । अथ व, स बिन्द्वोः वसभूम्युपरि व च, स प लम्बौ विधाय व द स अ कर्णौ क्रमेण प च पर्यन्तं वर्धनीयौ । अथ व स च, स अ इ त्रिभुजौ जातौ । अनयोः साजात्यादनुपातेन व च $= \frac{\text{अ इ} \times \text{व स}}{\text{स इ}} = \frac{\text{प्र·लं} \times \text{भूमि}}{\text{प्र·पी}}$ । एवं व स प, व उ द त्रिभुजयोः साजात्यतोऽनुपातेन—स प $= \frac{\text{द उ} \times \text{व स}}{\text{व उ}} = \frac{\text{द्वि·ल} \times \text{भू}}{\text{द्वि·पी·}}$ । तत आभ्यां वंशाभ्यां अन्योन्यमूलाग्रगसूत्रयोगादित्यादिना क ग लम्बस्तथा व ग, स ग आबाधे साधनीये, तेन लम्बौ भूघ्नौ निजनिजपीठविभक्ताविति सूत्रमुपपद्यते । अथ द बिन्द्वोः अ व समानान्तरा द ट रेखा विधेया तदा अ व इ, द ट उ त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन

ट उ $= \frac{\text{व इ} \times \text{द उ}}{\text{अ इ}} = \frac{\text{आ·सं} \times \text{द्वि० लं}}{\text{प्र·लं·}}$ = स म । ट उ + उ स = ट स = द्वि· सं· + स म = हारः । अथ स द ट, स न व त्रिभुजौ सजातीयौ ततः षष्ठाध्यायेन

$\frac{\text{व ट}}{\text{स ट}} = \frac{\text{द न}}{\text{स द}}$ । परञ्च $\frac{\text{द न}}{\text{स द}} = \frac{\text{म उ}}{\text{उ स}}$, अतः $\frac{\text{व ट}}{\text{स ट}} = \frac{\text{म उ}}{\text{उ स}}$ । $\therefore \frac{\text{व ट}}{\text{स ट}} + \text{१} = \frac{\text{म उ}}{\text{उ स}} + \text{१}$ । $\therefore \frac{\text{वट} + \text{सट}}{\text{स ट}} = \frac{\text{म उ} + \text{उ स}}{\text{उ स}}$ । $\therefore \frac{\text{व स}}{\text{स ट}} = \frac{\text{म स}}{\text{उ स}}$ । $\therefore$ सम =

स म $= \frac{\text{व स} \times \text{उ स}}{\text{स ट}} = \frac{\text{भू} \times \text{द्वि·सं}}{\text{हा}}$ = सूची प्र· आ· । एवमेव द्वि· आबा $= \frac{\text{भू} \times \text{प्र·सं}}{\text{हा}}$ । लम्बः $= \frac{\text{द उ} \times \text{स न}}{\text{सट}} = \frac{\text{द्वि·लं} \times \text{भू}}{\text{हा}}$ एवं ब स $= \frac{\text{द स} \times \text{व न}}{\text{द उ}} = \frac{\text{प्र भु} \times \text{सू लं.}}{\text{प्र लं}}$ = सूची भुजः । एवं सू· द्वि· भु· $= \frac{\text{द्वि·भु} \times \text{सू·लं}}{\text{द्वि·लं}}$ । अतउपपन्नं सर्वम्

अथ वृत्तक्षेत्रे करणसूत्रं वृत्तम्

व्यासे भनन्दाग्नि हते विभक्ते खबाणसूर्यैः परिधिः स सूक्ष्मः ।

द्वाविंशतिघ्ने विहृतेऽथ शैलैः स्थूलोऽथवा स्याद्व्यवहारयोग्यः ॥४०॥

व्यासे भनन्दाग्निहते खबाणसूर्यैः विभक्ते सति या लब्धिः स सूक्ष्मः परिधिः स्यात्। अथवा द्वाविंशतिघ्ने व्यासे शैले विहृते व्यवहारयोग्यः स्थूलः परिधिः स्यात्।

व्यास को ३९२७ से गुणाकर १२५० से भाग देने पर सूक्ष्म-परिधि होती है। अथवा व्यास को २२ से गुणा कर ७ से भाग देने पर व्यवहार के योग्य परिधि का स्थूल-मान होता है।

उपपत्तिः—ज्योत्पत्तिविधिना प्राचीनैश्चक्रकलापरिधौ तद्वृत्तव्यासमानं ६८७६ आनीतमतस्तद्वशेनानुपातेन रूपव्यासे परिधिः $\frac{२१६००\times १}{६८७६} = \frac{२१६००\times १००००}{६८७६\times १००००} = \frac{२१६००\times १००००}{६८७६\times ८\times १२५०} = \frac{१८००\times १२५०}{५७३\times १२५०} = \frac{२२५००००}{५७३\times १२५०}$

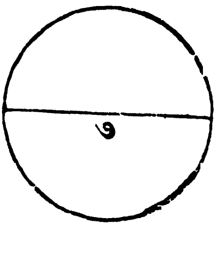
$= \frac{३९२७}{१२५०}$ स्वल्पान्तरात्तेनेष्टव्यासे परिधिमानम् $= \frac{\text{इ}\cdot\text{व्या}\times ३९२७}{१२५०}$ अत उपपन्नः सूक्ष्मः प्रकारः। अथ सू॰ प॰ $= \frac{\text{इ}\cdot\text{व्या}\cdot\times ३९२७}{१२५०} = \text{इ}\cdot\text{व्या}\times\left(३\frac{१७७}{१२५०}\right) =$ इ॰व्या $\left(३+\frac{१}{७}\right)$ स्वल्पान्तरात्। $\therefore$ स्थू॰ प॰ $= \frac{\text{इ}\cdot\text{व्या}\times २२}{७}$ अत उपपन्नं सर्वम्।

उदाहरणम्।

विष्कम्भमानं किल सप्त यत्र तत्र प्रमाणं परिधेः प्रचक्ष्व।
द्वाविंशतिर्यत् परिधिप्रमाणं तद्व्याससङ्ख्यां च सखे विचिन्त्य ॥१॥

हे मित्र ! जिस वृत्त का व्यास ७ है, उसकी परिधि बताओ, और जिस वृत्त की परिधि २२ है उसका व्यास बताओ।

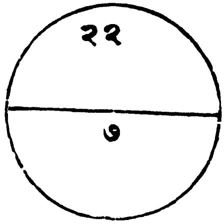
व्यासः।



व्यासमानम् ७। लब्धं परिधिमानम् २१$\frac{१२३९}{१२५०}$ स्थूला वा परिधिर्लब्धः २२।

अथवा परिधितो व्यासानयनाय-

न्यासः।



गुणहारविपर्ययेण व्यासमानं सूक्ष्मं $७\frac{११}{३९२७}$ स्थूलं वा ७।

उदाहरण—यहाँ व्यास ७ है, अतः सूत्र के अनुसार इसको ३९२७ से गुणा कर १२५० से भाग देने पर सूक्ष्म परिधि $= \frac{७ \times ३९२७}{१२५०} = \frac{२७४८९}{१२५०} = २१\frac{१२३९}{१२५०}$। इसी तरह व्यास ७ को २२ से गुणा करने पर $७ \times २२ = १५४$ हुआ। इसको ७ से भाग देने से $\frac{१५४}{७} = २२$ स्थूल परिधि हुई।

परिधि से व्यास का आनयन।

$\because प = \frac{व्या \times ३९२७}{१२५०}$ $\therefore व्या = \frac{प \times १२५०}{३९२७}$। इसलिये परिधि २२ को १२५० से गुणा कर ३९२७ से भाग देने पर $= \frac{२२ \times १२५०}{३९२७} = ७\frac{११}{३९२७}$ सूक्ष्म व्यास हुआ। अथवा स्थूल व्यास $= \frac{२२ \times ७}{२२} = ७$।

परिशिष्ट

यदि हमलोग किसी वृत्त की परिधि को नापकर, फिर उसके व्यास को नापते हैं, तो परिधि की लम्बाई व्यास की लम्बाई से लगभग $\frac{२२}{७}$ गुनी होती है। परिधि और व्यास की निष्पत्ति का वास्तव मान अङ्कों में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। इसका आसन्न मान ग्रीक भाषा में π (पाई) से व्यक्त किया जाता है। पाई का मान सात दशमलव अङ्कों तक = ३·१४१५९२६ होता है। भास्कराचार्य ने π का सूक्ष्ममान $\frac{३९२७}{१२५०}$ माना है, जो ३·१४१६ होता है। यह पूर्वोक्त मान के आसन्न है। व्यवहार के लिये π का मान $\frac{२२}{७}$ माना गया है।

$$अब \because \frac{परिधि}{व्यास} = \pi, \therefore प = \pi \times व्या = \pi \times २त्रिज्या$$

$$= २\pi \times त्रि \cdots\cdots (१)$$

$$\because प = २\pi \times त्रि, \therefore २ त्रि = \frac{प}{\pi}, \text{ या } व्या = \frac{प}{\pi} \cdots\cdots (२)$$

तथा त्रि = $\frac{प}{२\pi}$ ....(२)

उदाहरण

(१) किसी वृत्त का व्यास १ फी० ९ इञ्च है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो तो उस वृत्त की परिधि बताओ।

∵ प = π × व्या। यहाँ व्यास=१ फी० ९ इ० = २१ इ० तथा $\pi = \frac{२२}{७}$

∴ प = $\frac{२२ \times २१}{७}$ इ० = २२ × ३ इ० = ६६ इ० = ५ फी० ६ इ०।

(२) किसी वृत्त का व्यासार्ध ४ ग० २ फी० है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ तो उसकी परिधि बताओ।

व्यासार्ध=४ ग० २ फी०=१४ फी०। अब प=२ π ×त्रि=$\frac{२ \times २२ \times १४}{७}$ फी०

= २ × २२ × २ फी० = ८८ फी० = २९ ग० १ फु०।

(३) एक वृत्त की परिधि ७७ गज है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो तो उसका व्यास बताओ।

∵ व्या = $\frac{प}{\pi} = \frac{७७}{\frac{२२}{७}}$ ग० = $\frac{७७ \times ७}{२२}$ ग० = $\frac{४९}{२}$ ग० = २४ ग० १ फु० ६ इ०।

(४) किसी वृत्त की परिधि ८ फी० ३ इ० है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो तो उस वृत्त की त्रिज्या बताओ।

८ फी० ३ इ० = ९९ इ०। त्रि = $\frac{प}{२\pi} = \frac{९९ \times ७}{२ \times २२}$ इ० = $\frac{९ \times ७}{४}$ इ०

= $\frac{६३}{४}$ इ० = १५$\frac{३}{४}$ इ०।

(५) किसी गाड़ी के पहिये का व्यास ४$\frac{१}{५}$ फी० है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो ५$\frac{१}{५}$ माइल जाने में वह कितना चक्कर लगावेगा।

पहिये की परिधि = π × व्या = $\frac{२२}{७}$ × (४$\frac{१}{५}$) फी० = $\frac{२२}{७} \times \frac{२१}{५}$ फी० = $\frac{६६}{५}$ फी०, तो $\frac{६६}{५}$ फी० पार करने में वह पहिया १ चक्कर लगाता है। अतः ५$\frac{१}{५}$ माइल याने $\frac{२६ \times १७६० \times ३}{५}$ फी० पार करने में वह पहिया $\frac{२६ \times १७६० \times ३}{५} \div \frac{६६}{५}$ चक्कर लगावेगा।

= $\frac{२६}{५} \times \frac{१७६० \times ३ \times ५}{६६}$ = २०८० चक्कर।

(६) एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या ९८ गज है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो प्रति गज ८ आने की दर से उसको घेरने में क्या खर्च होगा।

वृत्ताकार मैदान की परिधि = २ π × त्रि० = $\frac{२ \times २२ \times ९८}{७}$ गज

= २ × २२ × १४ ग० = ६१६ गज।

∵ १ गज को घेरने में ८ आ० खर्च होता है।

∴ ६१६ ग० को घेरने में ६१६ × ८ आ० खर्च लगेगा

= $\frac{६१६ \times ८}{१६}$ रु० = ३०८ रु०।

(७) किसी इञ्जिन के पहिये का व्यास ४९ इ० है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो प्रति ४ मिनट में ३००० चक्कर लगाने के लिये उसे किस गति से चलना पड़ेगा।

इञ्जिन के पहिये की परिधि = π × व्या = $\frac{२२}{७}$ × ४९ इञ्च = १५४ इञ्च = $\frac{१५४}{१२}$ फी०, तो एक चक्कर में इञ्जिन $\frac{१५४}{१२}$ फी० पार करती है। अतः ३००० चक्कर में $\frac{३००० \times १५४}{१२}$ फी० पार करेगी।

∵ ४ मिनट में $\frac{३००० \times १५४}{१२}$ फी० चलती है

∴ ६० मिनट में $\frac{३००० \times १५४ \times ६०}{१२ \times ४}$ फी० वह इञ्जिन चलेगी

= ७५० × १५४ × ५ फी० = $\frac{७५० \times १५४ \times ५}{३ \times १७६०}$ माइल

= $\frac{२५ \times ७ \times ५}{८}$ मा० = $\frac{८७५}{८}$ मा० = १०९$\frac{३}{८}$ माइल।

∴ इञ्जिन की गति प्रति घण्टा १०९$\frac{३}{८}$ माइल।

(८) एक वृत्ताकार घासदार मैदान के चारों तरफ एक सड़क है। यदि वृत्त का बाहरी और भीतरी घेरा क्रम से ५०० गज और ३०० गज तथा $\pi = \frac{२२}{७}$ है, तो सड़क की चौड़ाई बताओ।

मान लिया कि बाहरी और भीतरी वृत्त की परिधि क्रम से प और प' तथा उनकी त्रिज्यायें क्रम से त्रि और त्रि' हैं, तो सड़क की चौड़ाई = त्रि − त्रि'।

अब बाहरी वृत्त की त्रिज्या = $\frac{प}{२\pi} = \frac{५००}{२\pi}$ तथा भीतरी वृत्त की त्रिज्या = त्रि'

= $\frac{प'}{२\pi} = \frac{३००}{२\pi}$।

∴ त्रि − त्रि' = $\left(\frac{५००}{२\pi} - \frac{३००}{२\pi}\right)$ ग० = $\frac{२००}{२\pi}$ ग० = $\frac{१००}{\pi}$ ग०

= $\frac{१०० \times ७}{२२}$ ग० = $\frac{७००}{२२}$ ग० = $\frac{३५०}{११}$ ग० = ३१$\frac{९}{११}$ गज।

(९) दो वृत्तों की त्रिज्याओं का योग ३५ गज और उनकी परिधियों का अन्तर ४४ गज है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो परिधि का मान अलग-अलग बताओ।

मान लिया कि दोनों वृत्तों की त्रिज्यायें क्रम से त्रि और त्रि' तथा उनकी परिधि क्रम से प और प' हैं, तो प = २ π त्रि, और प' = २ π × त्रि'। ∴ प + प' = २ π (त्रि' + त्रि) = २ π × ३५ गज

$= \frac{२ \times २२ \times ३५}{७}$ ग० = २२० ग० । अब प + प' = २२० ग० और प − प' = ४४ ग० । अतः संक्रमण गणित से प $= \frac{२२० + ४४}{२} = \frac{२६४}{२}$ ग० = १३२ ग० और प' = २२० − १३२ = ८८ ग० ।

(१०) किसी वृत्त की परिधि और व्यास का अन्तर ६० फी० है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

मान लिया कि उस वृत्त की त्रिज्या = त्रि है, तो उसकी परिधि = २ π × त्रि और व्यास = २ त्रि। अतः प − व्या

= २ π × त्रि − २ त्रि = २ त्रि (π − १) = ६० फी० ।

$\therefore$ त्रि $= \frac{६०}{\pi - १}$ फी० $= \frac{६०}{\frac{२२}{७} - १}$ फी० $= \frac{६० \times ७}{१५}$ फी० = ४ × ७ फी० = २८ फी० ।

अभ्यासार्थ प्रश्न (इस प्रश्नावली में $\pi = \frac{२२}{७}$)

यदि वृत्त के व्यास निम्न लिखित हों, तो परिधि बताओ।

(१) २१ इञ्च, (२) २ फी० ४ इञ्च, (३) १ फु० २ इञ्च, (४) ११ ग० २ फी०

यदि वृत्त की त्रिज्यायें निम्नलिखित हों, तो परिधि बताओ।

(५) ३ फी० ६ इञ्च, (६) ४ गज, २ फी०, (७) ३ ग० १ फु० ६ इञ्च।

यदि वृत्तों की परिधि निम्नलिखित हों, तो व्यास बताओ।

(८) ४४० फी०, (९) ५५० गज, (१०) ६ ग० ४ इञ्च।

(११) किसी गाड़ी के पहिये का व्यास ५ फी० ३ इञ्च है, तो १ माइल की दूरी तय करने में वह कितना चक्कर लगायेगा।

(१२) एक गाड़ी का पहिया दो माइल जाने में ६४ चक्कर लगाता है, तो उसका व्यास बताओ।

(१३) एक वृत्ताकार घासदार मैदान का व्यास ६ फी० ५ इञ्च है, तो प्रति गज ६ आने की दर से उसको चारो तरफ घेरने में कितना खर्च लगेगा।

(१४) एक इञ्जिन का पहिया, जिसका व्यास ५ फी० ३ इञ्च है, १ मिनट में २०४ चक्कर लगाता है, तो वह गाड़ी किस गति से चलती है।

(१५) एक ट्रेन ३० माइल प्रति घण्टे की गति से चलती है। यदि १ मिनट में इञ्जिन का पहिया १४० चक्कर लगाता है, तो पहिये का व्यास बताओ।

(१६) किसी वृत्ताकार घासदार मैदान के चारो तरफ एक सड़क है। यदि वृत्त का बाहरी घेरा २८८ ग० और भीतरी घेरा ११२ ग० है, तो सड़क की चौड़ाई बताओ।

(१७) दो वृत्तों की त्रिज्याओं का योग ६३ फी० है। यदि उनकी परिधियों का अन्तर ७६ फी० हो, तो परिधि के मान बताओ।

(१८) एक वृत्त की परिधि दूसरे वृत्त की परिधि से दूनी है। यदि उनके व्यासों का अन्तर १४ फी० हो, तो उनकी त्रिज्या अलग-अलग बताओ।

(१९) किसी वृत्त की परिधि और व्यास का योग ११६ फी० है, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

(२०) किसी वृत्त की परिधि का आधा और व्यास का योग १७ फी० है, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

(२१) किसी वृत्त की परिधि और व्यास का अन्तर ८ गज है, तो उस वृत्त की परिधि और त्रिज्या अलग-अलग बताओ।

(२२) एक वृत्त की परिधि और व्यास का अन्तर ६० फी० है, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

वृत्तगोलयोः फलानयने करणसूत्रं वृत्तम्।

वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं तत्
क्षुण्णं वेदैरुपरि परितः कन्दुकस्येव जालम्।
गोलस्यैवं तदपि च फलं पृष्ठजं व्यासनिघ्नं
षड्भिर्भक्तं भवति नियतं गोलगर्भे घनाख्यम्॥ ४१ ॥

वृत्तक्षेत्रे परिधिगुणितव्यासपादः फलं स्यात्। तत् फलं वेदैः क्षुण्णं तदा कन्दुकस्य जालम् इव गोलस्य उपरि परितः फलं स्यात्। एवं तदपि पृष्ठजं फलं व्यासनिघ्नं षड्भिः भक्तं गोलगर्भे नियतं घनाख्यं फलं स्यात्।

परिधि को व्यास से गुणा कर ४ से भाग देने पर वृत्त का क्षेत्रफल होता है। उस क्षेत्रफल को ४ से गुणा करने से गोल का पृष्ठ-फल होता है। उस गोल पृष्ठफल को व्यास से गुणा कर ६ से भाग देने पर गोल का घनफल होता है।

उपपत्तिः—'वृत्तस्य षण्णवत्यंशो दण्डवद्दृश्यते तु सः' इत्युक्त्या वृत्तपरिधिं न महत्तमसंख्यया विभज्यैकः सूक्ष्म विभागः $= \frac{प}{न}$। वृत्तव्यासार्धम् $= \frac{व्या}{२}$। अथ प्रति विभागस्य प्रान्तयोर्वृत्तकेन्द्रात्सूत्रे नेये तदा वृत्तकेन्द्रशीर्षात्मकानि न संख्यकानि समानानि समद्विबाहुकत्रिभुजानि येषु वृत्तस्य त्रिज्यारूपौ भुजौ, $\frac{प}{न}$ आधारश्च। तत्राधारस्याल्पत्वाच्छीर्षबिन्दोस्तदुपरिकृतो लम्बस्त्रिभुजभुज सम त्वातो लम्ब गुणं भूम्यर्धमित्यादिनैकस्य त्रिभुजस्य फलम् $= \frac{प}{२ न} \times$ त्रि

$= \frac{प}{२ न} \times \frac{व्या}{२} = \frac{प \times व्या}{४ न}$। इदं न संख्यया गुणितं तदा सर्वेषां त्रिभुजानां फलं, तदेव वृत्तफल सममतः वृत्तफलम् $= \frac{प \times व्या}{४ न} \times न = \frac{प \times व्या}{४}$ अत उपपन्नं परिधिगुणितव्यासपादः फलमिति। अयं परिधिव्यासघातोऽतो गोलपृष्ठ फलं वेत्तेन गोलपृष्ठफल $=$ प $\times$ व्या $= \frac{प \times व्या \times ४}{४} =$ वृ क्षे·फ· $\times$ ४ एतेनोपपन्नं गोलपृष्ठफलानयनम्। अथ गोलघनफलार्थं कल्प्यते कापि महत्तम संख्या $=$ न। तया यदि गोलपृष्ठफलं विभज्यते तदैकभागस्य मानम् $= \frac{पृ· फ}{न}$। ततो गोलकेन्द्रात्प्रतिविभागस्य प्रति बिन्दुगतानि त्रिज्यासूत्राणि नेयानि, तथा कृते न संख्यकानि तुल्यानि सूचीक्षेत्राणि जातानि। तत्र क्षेत्रफलं वेध गुणमित्यादिनैकस्य क्षेत्रस्य सम घनफलम् $= \frac{पृ· फ}{न} \times \frac{व्या}{२}$, (अत्र न संख्याया महत्तमत्वेन

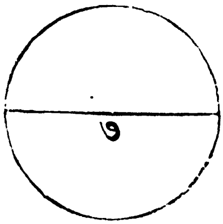
वेधस्य त्रिज्यातुल्यत्वम्)। अथ 'समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलमित्यादिना सूचीघनफलम्' = $\frac{\text{पृ}\cdot\text{फ}}{\text{न}}\times\frac{\text{व्या}}{२\times३}$ । परञ्च गोलगर्भे न मितानि सूचीघनफलानि सन्त्यत इदं सूचीघनफलं न संख्यया गुणितं जातं गोलघनफलम् $=\frac{\text{पृ}\cdot\text{फ}\times\text{व्या}}{\text{न}\times६}\times\text{न}$ $=\frac{\text{पृ}\cdot\text{फ}\times\text{व्या}}{६}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

यद्व्यासस्तुरगैर्मितः किल फलं क्षेत्रे समे तत्र किं
व्यासः सप्तमितश्च यस्य सुमते गोलस्य तस्यापि किम् ।
पृष्ठे कन्दुकजालसन्निभफलं गोलस्य तस्यापि किं
मध्ये ब्रूहि घनं फलं च विमलां चेद्वेत्सि लीलावतीम् ॥ १ ॥

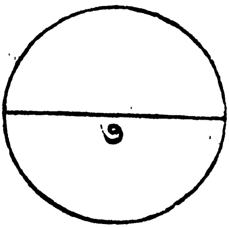
जिस वृत्त का व्यास ७ है, उसका क्षेत्रफल, एवं जिस गोल का व्यास ७ है उसका पृष्ठफल और उसी गोल का घनफल, यदि तुम पाटीगणित जानते हो, तो बताओ ।

वृत्तक्षेत्रफलदर्शनाय

व्यासः


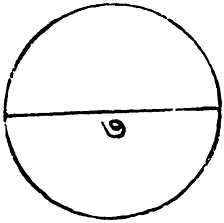
व्यासः ७ ।
परिधिः $२१\frac{१२३९}{१२५०}$ ।
क्षेत्रफलम् $३८\frac{२४२३}{५०००}$ ।

गोलपृष्ठफलदर्शनाय

व्यासः


व्यासः ७ ।
गोलपृष्ठफलम् $१५३\frac{११७३}{१२५०}$

गोलान्तर्गतघनफलदर्शनाय



व्यासः ।

व्यासः ७ ।
गोलस्यान्तर्गतं घनफलम्
$१७९\frac{१४८७}{२५००}$ ।

उदाहरण—७ व्यास की परिधि उक्तरीति से $\frac{७ \times ३९२७}{१२५०}$ हुई। इसको व्यास ७ के चतुर्थांश से गुणा करने पर क्षेत्रफल $= \frac{७ \times ३९२७ \times ७}{१२५० \times ४} = ३८\frac{२४२३}{५०००}$ । अथवा स्थूल क्षेत्रफल $= \frac{७ \times २२ \times ७}{७ \times ४} = \frac{१५४}{४} = ३८\frac{१}{२}$ । उक्त क्षेत्रफल को ४ से गुणा करने पर गोलपृष्ठफल $= १५३\frac{११७३}{१२५०}$ हुआ। इस पृष्ठफल को व्यास ७ से गुणा कर ६ से भाग देने पर गोलघनफल $= १७९\frac{१४८७}{२५००}$ ।

अथ प्रकारान्तरेण तत्फलानयने करणसूत्रं सार्द्धवृत्तम् ।

व्यासस्य वर्गे भनवाग्निनिघ्ने सूक्ष्मं फलं पञ्चसहस्रभक्ते ।
रुद्राहते शक्रहृतेऽथवा स्यात् स्थूलं फलं तद्व्यवहारयोग्यम् ॥४२॥
घनीकृतव्यासदलं निजैकविंशांशयुग्गोलघनं फलं स्यात् ।

भनवाग्निनिघ्ने व्यासस्य वर्गे पञ्चसहस्रभक्ते सति सूक्ष्मं फलं स्यात्। अथवा व्यासस्य वर्गे रुद्राहते शक्रहृते सति तद्व्यवहारयोग्यं स्थूलं फलं स्यात्। घनीकृतव्यासदलं निजैकविंशांशयुक्, गोलघनं फलं स्यात्।

व्यास के वर्ग को ३९२७ से गुणा कर ५००० से भाग देने पर सूक्ष्म फल होता है। एवं व्यास के वर्ग को ११ से गुणा कर १४ से भाग देने पर स्थूल फल होता है। व्यास के घन के आधे में उसी का २१ वाँ भाग जोड़ने पर घनफल होता है।

उपपत्तिः—सूक्ष्मपरिधिः $= \frac{\text{व्या} \times ३९२७}{१२५०}$, अतः सूक्ष्म क्षेत्रफलम् $= \frac{\text{प} \times \text{व्या}}{४} = \frac{\text{व्या} \times ३९२७ \times \text{व्या}}{१२५० \times ४} = \frac{\text{व्या}^{२} \times ३९२७}{५०००}$ । अथ स्थूल परिधिः $= \frac{\text{व्या} \times २२}{७}$, अतः स्थूलफलम् $= \frac{\text{स्थू. प} \times \text{व्या.}}{४}$

$$=\frac{\text{व्या}\times २२\times\text{व्या}}{७\times ४}=\frac{\text{व्या}^{२}\times २२}{२८}=\frac{\text{व्या}^{२}\times ११}{१४}$$ । अथ गोल पृ० फलम्

$$=\text{क्षे}\cdot\text{फ}\times ४=\frac{\text{व्या}^{२}\times ११\times ४}{१४}=\frac{\text{व्या}^{२}\times २२}{७}$$ । अतः गोल घन फलम्

$$=\frac{\text{पृ}\cdot\text{फ}\times\text{व्या}}{६}=\frac{\text{व्या}^{२}\times २२\times\text{व्या}}{७\times ६}=\frac{\text{व्या}^{3}\times २२}{४२}=\frac{\text{व्या}^{3}}{४२}(२१+१)$$

$$=\frac{\text{व्या}^{3}}{२}\left(\frac{२१}{२१}+\frac{१}{२१}\right)=\frac{\text{व्या}^{3}}{२}\left(1+\frac{१}{२१}\right)=\frac{\text{व्या}^{3}}{२}+\frac{\text{व्या}^{3}}{२\times २१}$$ अत उपपन्नम् ।

न्यासः ७। अस्य वर्गे ४९। भनवाग्निनिघ्ने पञ्चसहस्रभक्ते तदेव सूक्ष्मं फलम् ३८$\frac{२४२३}{५०००}$। अथवा व्यासस्यवर्गे ४९। रुद्राहृते ५३९। शक्रहृते लब्धं स्थूलं फलम् ३८$\frac{१}{२}$। घनीकृतव्यासदलम् $\frac{३४३}{२}$ निजैकविंशांशयुग्गोलस्य घनफलं स्थूलम् १७९$\frac{२}{३}$।

उदाहरण—व्यास ७ के वर्ग ४९ को ३९२७ से गुणाकर ५००० से भाग देने पर सूक्ष्मफल=३८$\frac{२४२३}{५०००}$। वा ४९ को ११ से गुणाकर १४ से भाग देने पर स्थूलफल = ३८$\frac{१}{२}$। व्यास ७ के घन ३४३ के आधे में अपना २१वाँ भाग जोड़ने से स्थूल घनफल = $\frac{३४३}{२}+\frac{३४३}{२\times २१}$ = १७९$\frac{२}{३}$।

परिशिष्ट।

वृत्त का क्षेत्रफल $=\frac{\text{प}\times\text{व्या}}{४}=\frac{\pi\times\text{व्या}\times\text{व्या}}{४}=\frac{\pi\times २\,\text{त्रि}\times २\,\text{त्रि}}{४}$

$$=\pi\times\text{त्रि}^{२}\cdots\cdots\cdots\cdots(१)$$

$$\therefore\text{त्रि}=\sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}\cdots\cdots\cdots\cdots(२)$$

दो समकेन्द्रिक वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल।

यदि दो समकेन्द्रिक वृत्त की त्रिज्यायें क्रम से त्रि और त्रि$'$ हो तथा त्रि $>$ त्रि$'$, तो दोनों वृत्तों के बीच का रकबा $=\pi(\text{त्रि}^{२}-\text{त्रि}'^{२})$

$$=\pi(\text{त्रि}+\text{त्रि}')(\text{त्रि}-\text{त्रि}')\cdots\cdots\cdots\cdots(३)$$

उदाहरण

(१) किसी वृत्त की त्रिज्या ४ गज २ फी० है। यदि $\pi=\frac{२२}{७}$ हो, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi\times\text{त्रि}^{२}$। यहाँ त्रि = ४ ग० २ फी० = १४ फी०।

∴ क्षेत्रफल $=\frac{\text{२२}}{\text{७}}\times$ १९६ व० फी० = २२ × २८ व० फी० = ६१६ व० फी०।

(२) किसी वृत्त का व्यास ५ फी० ३ इञ्च है। यदि $\pi = \frac{\text{२२}}{\text{७}}$ हो तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

क्षेत्रफल = π × त्रि$^{\text{२}}$। यहाँ व्यास = ५ फी० ३ इञ्च = ६३ इञ्च,

∴ त्रि = $\frac{\text{६३}}{\text{२}}$ इ०। ∴ क्षेत्रफल = $\frac{\text{२२}}{\text{७}} \times \frac{\text{६३}\times\text{६३}}{\text{२}\times\text{२}}$ व० इञ्च।

= $\frac{\text{११}\times\text{९}\times\text{६३}}{\text{२}}$ व० इञ्च = $\frac{\text{११}\times\text{९}\times\text{६३}}{\text{२}\times\text{१४४}\times\text{९}}$ व० ग० = $\frac{\text{७७}}{\text{३२}}$ व० ग०

= २ व० ग० ३ व० फी० ९४$\frac{\text{१}}{\text{२}}$ व० इ०।

(३) किसी वृत्त का क्षेत्रफल ४ व· फी· ४० व· इ· है। यदि $\pi = \frac{\text{२२}}{\text{७}}$ हो, तो उस वृत्त की त्रिज्या बताओ।

वृत्त की त्रिज्या = $\sqrt{\frac{\text{वृ· क्षे· फल}}{\pi}}$। यहाँ क्षे फ· = ४ व· फी·, ४० व· इ· = ६१६ व· इ·। ∴ त्रि $\sqrt{\frac{\text{६१६}}{\frac{\text{२२}}{\text{७}}}}$ इञ्च = $\sqrt{\frac{\text{६१६}\times\text{७}}{\text{२२}}}$ इ०

= $\sqrt{\text{२८}\times\text{७}}$ इ० = $\sqrt{\text{१९६}}$ इ० = १४ इ०।

(४) किसी वृत्त का क्षेत्रफल २४६४ व· फी· है। यदि $\pi = \frac{\text{२२}}{\text{७}}$ हो, तो उसकी परिधि बताओ।

(इस तरह के प्रश्न में पहले त्रिज्या का मान निकालना चाहिये।)

वृत्त की त्रिज्या = $\sqrt{\frac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\text{२४६४}}{\frac{\text{२२}}{\text{७}}}}$ फी०

= $\sqrt{\frac{\text{२४६४}\times\text{७}}{\text{२२}}}$ फी० = $\sqrt{\text{११२}\times\text{७}}$ फी० = $\sqrt{\text{१६}\times\text{७}\times\text{७}}$ फी०

= ४ × ७ फी० = २८ फी०।

∴ वृत्त की परिधि = २π × त्रि = २π × २८ फी० = $\frac{\text{२}\times\text{२२}}{\text{७}}$ × २८ फी० = १७६ फी०।

(५) दो समकेन्द्रिक वृत्त की त्रिज्यायें १ फु० ९ इञ्च और १ फु० २ इञ्च हैं। यदि $\pi = \frac{\text{२२}}{\text{७}}$ हो तो दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल बताओ।

दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल = π(त्रि + त्रि') (त्रि − त्रि')।

यहाँ त्रि = १ फु० ९ इञ्च = २१ इञ्च, और त्रि' = १ फु० २ इञ्च।

∴ क्षेत्रफल = π(२१ + १४) (२१ − १४) व· इ· = π × ३५ × ७ व· इ· = $\frac{\text{२२}}{\text{७}}$ × ३५ × ७ व· इ· = २२ × ३५ व· इ· = ७७० व· इ·।

(६) दो समकेन्द्रिक वृत्तों में बड़े वृत्त की त्रिज्या और दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल क्रम से ६ फी०, और ११० वर्गफीट हैं। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो छोटे वृत्त की त्रिज्या बताओ।

दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल $= \pi$ (त्रि$'^{२}$ − त्रि^{२})

∴ छोटे वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{\text{त्रि}^{२} - \frac{\text{दोनों वृत्तों के बीच का क्षेत्रफल}}{\pi}}$

$= \sqrt{६^{२} - \frac{११०}{\pi}} = \sqrt{३६ - \frac{११० \cdot ७}{२२}} = \sqrt{३६ - ३५} = १$ फी

(७) किसी वृत्ताकार खेत की मालगुजारी प्रति एकड़ ५ रु० की दर से ६२५० रु० होता है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो तो उसका व्यास बताओ।

∵ ५ रु०—१ एकड़ की मालगुजारी होता है।

∴ ६२५० रु०—६२५० ÷ ५ एकड़ की मालगुजारी होगा।

= १२५० एकड़। अब खेत का क्षेत्रफल = १२५० एकड़

= १२५० × ४८४० व० ग०। ∴ वृत्ताकार खेत की त्रि $= \sqrt{\frac{\text{क्षे. फ.}}{\pi}}$

$= \sqrt{\frac{१२५० \times ४८४० \times ७}{२२}}$ ग० $= \sqrt{\frac{१२५० \times २२० \times ७}{१}}$ ग०

$= \sqrt{२५ \times १०० \times ५ \times २२ \times ७}$ ग० $= ५ \times १० \sqrt{७७०}$ गज $=$ $५०\sqrt{७७०}$ ग०। ∵ व्या $= १००\sqrt{७७०}$ ग०।

(९) किसी वृत्त की परिधि ३९६ फीट है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

वृत्त की त्रिज्या $= \frac{\text{प}}{२\pi} = \frac{३९६ \times ७}{२ \times २२}$ फी० $= ९ \times ७$ फी० $= ६३$ फी०।

अब वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times$ त्रि^{२} $= \frac{२२}{७} \times ६३^{२}$ व. फी.

$= २२ \times ९ \times ६३$ व. फी. $= १२४७४$ व. फी.।

(१०) किसी वृत्त का क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ८४ और ६६ फी० है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो वृत्त की त्रिज्या बताओ।

∵ आयात का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = ८४ × ६६ व. फी.

अब प्रश्न के अनुसार आयत का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}} = \sqrt{\frac{८४ \times ६६ \times ७}{२२}}$ फी० $= \sqrt{८४ \times ३ \times ७}$ फी०

$= \sqrt{४ \times २१ \times २१}$ फी० $= २ \times २१$ फी० $= ४२$ फी०।

(११) किसी मैदान में एक घोड़ा एक खूँटी में रस्सी से बँधा हुआ है, जिससे वह खूँटी के चारो तरफ ९८५६ व० ग० में चर सकता है। यदि $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो रस्सी की लम्बाई बताओ।

रस्सी की लम्बाई उस वृत्ताकार भूमि की त्रिज्या है जिसमें घोड़ा चरता है। अतः त्रि $= \sqrt{\frac{\text{क्षे० फ०}}{\pi}} = \sqrt{\frac{९८५६ \times ७}{२२}}$ ग० $= \sqrt{४४८ \times ७}$ ग०

$= \sqrt{७ \times ६४ \times ७}$ ग० $= ७ \times ८$ ग० $= ५६$ ग०।

$\therefore$ रस्सी की लम्बाई $= ५६$ ग०।

(१२) एक वृत्त की त्रिज्या $\sqrt{१३८६}$ फी० है। यदि इस वृत्त का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो और $\pi = \frac{२२}{७}$ हो, तो वर्ग की भुजा बताओ।

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times \text{त्रि}^2 = \pi \times १३८६$ व० फी०

$= \frac{२२}{७} \times १३८६$ व० फी० $= २२ \times १९८$ व० फी०। $\because$ वृ० का क्षे० फ० $=$ वर्ग का क्षेत्रफल $\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल $= २२ \times १९८$ व० फी०।

$\therefore$ वर्ग की भुजा $= \sqrt{२२ \times १९८}$ फी० $= ११ \times ६$ फी० $= ६६$ फी० $= २२$ ग० उत्तर।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(इस प्रश्नावली में $\pi = \frac{२२}{७}$)

उन वृत्तों का क्षेत्रफल बताओ जिनकी त्रिज्या निम्नलिखित है।

(१) २ गज ३ इञ्च।

(२) २ फी० ३ इञ्च।

(३) १८ ग० १ फी०।

(४) ८ ग०।

उन वृत्तों की त्रिज्या बताओ, जिनका क्षेत्रफल निम्नलिखित हैं।

(५) १५४०० व० ग०।

(६) ९८५६ व॰ फी॰ ।

(७) ७ व॰ ग॰ १ व॰ फी॰ ।

(८) एक वृत्ताकार घासदार मैदान में चारो तरफ रास्ता है। यदि उसका बाहरी और भीतरी व्यास क्रम से १० ग॰ और ८ ग॰ हों, तो रास्ते का क्षेत्रफल बताओ।

(९) एक वृत्ताकार चबूतरे के चारो तरफ फूल की क्यारी लगी है। यदि उसकी भीतरी त्रिज्या १७१ फीट हो और बाहरी त्रिज्या उससे दूनी हो तो क्यारी का क्षेत्रफल बताओ।

(१०) किसी वृत्ताकार टेबुल की त्रिज्या १४ फी॰ है। एक वृत्ताकार संगमरमर का टुकड़ा, जिसका क्षेत्रफल ६१६ व॰ फी॰ है, उस टेबुल के मध्य में लगा हुआ है, तो टेबुल के शेष भाग का क्षेत्रफल बताओ।

(११) एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या २१ गज है, तो प्रति वर्गगज ४ शि॰ की दर से उसमें पत्थर का फर्श कराने में कितना खर्च लगेगा।

(१२) किसी वृत्ताकार मैदान में प्रति वर्गगज ५ शि॰ की दर से पत्थर बिछाने का खर्च १५४ पौ॰ लगता है, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

(१३) एक वृत्ताकार इस्पात के टुकड़े का मूल्य प्रति वर्गगज ८ शि॰ की दर से ९६० पौ॰ ८ शि॰ होता है, तो उसका व्यास बताओ।

(१४) एक वृत्ताकार मैदान के चारो तरफ एक रास्ता है। यदि रास्ते का क्षेत्रफल मैदान के क्षेत्रफल के बराबर हो और मैदान की त्रिज्या ४० फीट हो, तो रास्ते की चौड़ाई बताओ।

(१५) दो वृत्तों की त्रिज्यायें क्रम से ५ ग॰ और १२ गज हैं, तो उस वृत्त की त्रिज्या बताओ, जिसका क्षेत्रफल उक्त वृत्तों के क्षेत्रफल के योग के समान हो।

(१६) किसी वृत्त का क्षेत्रफल १३८६ व॰ ग॰ है, तो उसकी परिधि बताओ।

(१७) किसी वृत्त का क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ८८ फी॰ और २८ फी॰ हैं, तो उस वृत्त का व्यास बताओ।

(१८) किसी वृत्त की त्रिज्या १४ ग॰ है। यदि उसका क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर हो, तो वर्ग की भुजा बताओ।

(१९) एक वृत्त का क्षेत्रफल १५४०० व॰ फी॰ है, तो उसकी परिधि बताओ।

(२०) किसी वृत्ताकार तालाब का क्षेत्रफल १३२०० व॰ ग॰ है, तो उसकी त्रिज्या बताओ।

(२१) एक घासदार मैदान में किसी खूँटी में एक रस्सी से एक घोड़ा इस तरह बँधा है कि वह खूँटी के चारो तरफ २४६४ व॰ ग॰ भूमि में चर सकता है, तो रस्सी की लम्बाई बताओ।

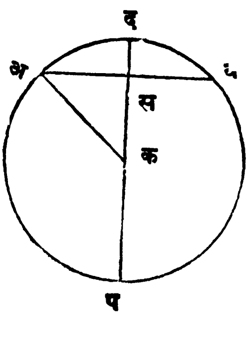
शरजीवानयनाय करणसूत्रं सार्द्धवृत्तम्।

ज्याव्यासयोगान्तरघातमूलं व्यासस्तदूनो दलितः शरः स्यात्॥
व्यासाच्छरोनाच्छरसंगुणाच्च मूलं द्विनिघ्नं भवतीह जीवा।
जीवार्धवर्गे शरभक्तयुक्ते व्यासप्रमाणं प्रवदन्ति वृत्ते॥

ज्याव्यासयोगान्तरघातमूलं यत् तदूनः व्यासः दलितः शरः स्यात्। शरोनात् व्यासात् शरसंगुणात् मूलं द्विनिघ्नं इह जीवा भवति। जीवार्धवर्गे शरभक्तयुक्ते सति वृत्ते व्यासप्रमाणं प्रवदन्ति।

जीवा और व्यास के योग और अन्तर के गुणनफल के मूल को व्यास में घटाकर आधा करने से शर होता है। एवं व्यास और शर के अन्तर को शर से गुणाकर उसके मूल को द्विगुणित करने पर जीवा होती है। जीवा के आधे के वर्ग में शर से भाग देकर लब्धि जो हो उसमें शर जोड़ने से वृत्त का व्यास होता है।

उपपत्तिः—अ ब = जीवा। अत्र जीवा शब्देन पूर्णज्या बोध्या। क = वृत्त केन्द्रम्। स द = शरः, द प = वृत्तव्यासः। अ ब रेखोपरि क बिन्दोः क स



लम्बः। अ॰ अ क स त्रिभुजे क स $= \sqrt{\text{अ क}^2 - \text{अ स}^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{व्या}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ज्या}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{व्या}}{2} + \frac{\text{ज्या}}{2}\right)\left(\frac{\text{व्या}}{2} - \frac{\text{ज्या}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{व्या} + \text{ज्या}}{2}\right)\left(\frac{\text{व्या} - \text{ज्या}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\text{व्या} + \text{ज्या})\ (\text{व्या} - \text{ज्या})} = \frac{\text{मू}}{2}$$

$$\text{क द} - \text{क स} = \text{द स} = \text{शरः} = \text{त्रि} - \frac{\text{मू}}{२} = \frac{२\,\text{त्रि} - \text{मू}}{२} = \frac{\text{व्या} - \text{मू}}{२}$$

$$\text{अ स} = \sqrt{\text{अ क}^२ - \text{क स}^२} = \sqrt{\text{क द}^२ - \text{क स}^२}$$

$$= \sqrt{(\text{क द} + \text{क स})(\text{क द} - \text{क स})}$$

$$= \sqrt{(\text{क प} + \text{क स})\,(\text{क द} - \text{क स})} = \sqrt{\text{प स} \times \text{स द}}$$

$$= \sqrt{(\text{प द} - \text{द स}) \times \text{स द}} = \sqrt{(\text{व्या} - \text{श})\,\text{श}}\text{।}$$

$$\therefore\ २\,\text{अ स} = २\sqrt{(\text{व्या} - \text{श})\,\text{श}}$$

$$\text{वा अ व} = \sqrt{(\text{व्या} - \text{श})\,\text{श}} = \text{जीवा}\text{।}$$

$$\text{अथ ज्या} = २\sqrt{(\text{व्या} - \text{श})\,\text{श}}\text{।} \quad \therefore \frac{\text{ज्या}}{२} = \sqrt{(\text{व्या} - \text{श})\,\text{श}}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{ज्या}}{२}\right)^२ = (\text{व्या} - \text{श})\,\text{श}\text{।} \quad \therefore \frac{\left(\frac{\text{ज्या}}{२}\right)^२}{\text{श}} = \text{व्या} - \text{श}$$

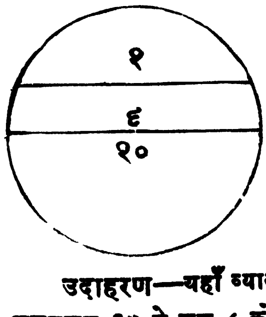
$$\therefore \text{व्या} = \frac{\left(\frac{\text{ज्या}}{२}\right)^२}{\text{श}} + \text{श}$$ अतः उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

दशविस्तृतिवृत्तान्तर्यत्र ज्या परिमता सखे ।
तत्रेषुं वद बाणाज्ज्यां ज्याबाणाभ्यां च विस्तृतिम् ॥ १ ॥

जिस वृत्त का व्यास १० और जीवा ६ हैं उसका शर बताओ, एवं जीवा और शर पर से व्यास बताओ ।

न्यासः



व्यासः १० । ज्या ६ । योगः १६ । अन्तरम् ४ । घातः ६४। मूलम् ८। एतदूनो व्यासः २ । दलितः १ । जातः शरः १। व्यासात् १०। शरोनात् ९। शर १ संगुणात् ९ । मूलं ३ द्विनिघ्नं जाता जीवा ६ । एवं ज्ञाताभ्यां ज्याबाणाभ्यां व्यासानयनं यथा । जीवार्द्ध ३ । वर्गे शर १ भक्ते ९ । शर १ युक्ते जातो व्यासः १० ।

उदाहरण—यहाँ व्यास १० और जीवा ६ के योग १६ और अन्तर ४ के गुणनफल ६४ के मूल ८ को व्यास १० में घटा कर शेष २ का आधा १ शेर

हुआ। शर १ को व्यास में घटाकर शेष (१० − १) = ९ को शर १ से गुणा कर मूल लेने पर ३ हुआ। इसे २ से गुणा करने पर ६ जीवा हुई। जीवार्ध ३ के वर्ग ९ में शर १ से भाग देने पर लब्धि ९ में शर १ को जोड़ने से १० व्यास हुआ।

परिशिष्ट

'ज्याव्यासयोगान्तरघातमूलम्' इस सूत्र के अनुसार

$$\text{शर} = \frac{\text{व्या} - \sqrt{\text{व्या}^{२} - \text{पूज्या}^{२}}}{२} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\text{पूज्या} = २\sqrt{\text{श}(\text{व्या} - \text{श})} \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$$\text{और व्यास} = \frac{\left(\frac{\text{पूज्या}}{२}\right)^{२}}{\text{श}} + \text{श} \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

अभ्यासार्थ उदाहरण

(१) किसी वृत्त की त्रिज्या १५ गज है। यदि उससे एक चाप की ऊँचाई ३ गज हो तो उसकी पूर्णज्या का मान बताओ। (जिसका नाम भास्कराचार्य ने शर रखा है, वही चाप की ऊँचाई कहलाती है।

यहाँ शर = ३ गज और त्रि = १५ है। अतः $\text{पूज्या} = २\sqrt{\text{श}(\text{व्या} - \text{श})}$

$= २\sqrt{३(३० - ३)}$ ग० $= २\sqrt{३ \times २७}$ ग० = १८ गज।

(२) एक चाप की पूर्णज्या १२ फी० और उस चाप की ऊँचाई ४ फी० हैं, तो उस वृत्त का व्यास बताओ।

$$\text{व्या} = \frac{\left(\frac{\text{पूज्या}}{२}\right)^{२}}{\text{श}} + \text{श} = \left(\frac{६^{२}}{४} + ४\right) \text{फी०} = \left(\frac{३६}{४} + ४\right) \text{फी०}$$

$= (९ + ४)$ फी० = १३ फी०।

(३) किसी वृत्त का व्यास ३४ फी० और उसकी एक पूर्णज्या (चाप जीवा) ३० फी० हैं, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ।

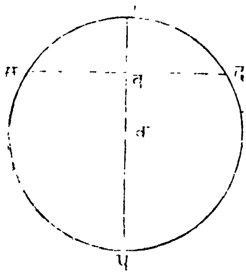
यहाँ व्यास = ३४ फी० और पूज्या ३० फी० हैं।

$$\therefore \text{चाप की ऊँचाई} = \frac{\text{व्या} - \sqrt{\text{व्या}^{२} - \text{पूज्या}^{२}}}{२}$$

$$= \frac{३४ - \sqrt{३४^{२} - ३०^{२}}}{२} \text{फी०} = \frac{३४ - \sqrt{६४ \times ४}}{२} \text{फी०}$$

$$= \frac{३४ - १६}{२} \text{फी०} = \frac{१८}{२} \text{फी०} = ९ \text{फी०}।$$

(४) किसी वृत्ताकार झील के किनारे से एक जहाज उस झील की व्यास रेखा पर चला, लेकिन ३ माइल जाने के बाद एक आन्धी के कारण वह जहाज पहले की दिशा से लम्ब रूप दिशा में रवाना होकर ५ माइल चलने के बाद फिर झील के किनारे पहुँच गया, तो झील की चौड़ाई बताओ ।



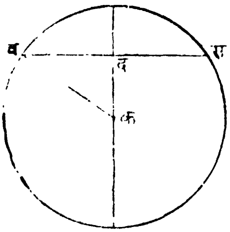
मान लिया कि अ स्थान से वह जहाज अ प दिशा में चल कर जब वह व बिन्दु पर आया, तो आन्धी के कारण व स दिशा की ओर मुड़ गया, और इसके बाद ५ माइल चल कर स स्थान पर पहुँचा, तो झील की चौड़ाई यानी व्यास का मान लाना है ।

यहाँ अ व = शर = ३ माइल, और व स $= \frac{\text{पूज्या}}{२} =$ ५ माइल ।

$\therefore$ झील की चौड़ाई = व्या $= \frac{\left(\frac{\text{पूज्या}}{२}\right)^२}{\text{श}} + \text{श} = \left(\frac{२५}{३} + ३\right)$ माइल ।

$= \frac{२५+९}{३}$ माइल $= \frac{३४}{३}$ माइल $= ११\frac{१}{३}$ माइल ।

(५) किसी वृत्त की पूर्णज्या (चाप जीवा) ६ इञ्च और केन्द्र से उसकी दूरी ४ इञ्च हैं, तो चाप की ऊँचाई बताओ ।



मान लिया कि व स वह पूर्णज्या है जिसकी लम्बाई ६ इञ्च और क द उसकी केन्द्र से दूरी ४ इञ्च हैं, तो व द $= \frac{\text{व स}}{२} =$ ३ इञ्च, क व = त्रिज्या

$= \sqrt{\text{व द}^२ + \text{क द}^२} = \sqrt{३^२ + ४^२}$ इञ्च

$= \sqrt{९ + १६} = \sqrt{२५}$ इञ्च = ५ इञ्च ।

$\therefore$ व्यास = १० इञ्च । अ व श

$= \frac{\text{व्या} - \sqrt{\text{व्या}^२ - \text{पूज्या}^२}}{२} = \frac{१० - \sqrt{१०० - ३६}}{२}$ इञ्च

$= \frac{१०-८}{२}$ इञ्च = १ इञ्च ।

(६) किसी वृत्त के चाप के समान एक पुल का फैलाव १३२ गज है, यदि उसकी ऊँचाई ११ गज हो, तो उसकी त्रिज्या बताओ ।

यहाँ पुल का फैलाव उस चाप की पूर्णज्या है, जो पुल से बना है, तो

$$\text{व्यास} = \frac{(\frac{1}{2}\ \text{पूज्या})^2}{\text{श}} + \text{श} = \left(\frac{६६^२}{११} + ११\right)\ \text{गज}$$

$$= (६ \times ६६ + ११)\ \text{गज} = (३९६ + ११)\ \text{ग०} = ४०७\ \text{ग०}।$$

$$\therefore\ \text{त्रिज्या} = \frac{४०७}{२}\ \text{ग०} = २०३\ \text{ग०}\ १\ \text{फी०}\ ६\ \text{इञ्च}।$$

अभ्यासार्थ प्रश्न ।

(१) किसी वृत्त की त्रिज्या १० फी० और उसके एक चाप की ऊँचाई ४ फी० है, तो पूर्णज्या की लम्बाई बताओ ।

(२) किसी वृत्त का व्यास ३४ गज और उसके एक चाप की ऊँचाई ९ गज है, तो पूर्णज्या की लम्बाई बताओ ।

(३) किसी चाप की पूर्णज्या ३ इञ्च और वृत्त का व्यास ७ इञ्च है, तो उस चाप की ऊँचाई ५ दशमलव अङ्कों तक बताओ ।

(४) किसी चाप की ऊँचाई ४ इञ्च और उसकी पूर्णज्या १६ इञ्च हैं, तो वृत्त का व्यास बताओ ।

(५) किसी चाप की पूर्णज्या १२ फी० और उस चाप की ऊँचाई ३ फी० है, तो वृत्त का व्यास बताओ ।

(६) किसी चाप की पूर्णज्या २८ गज और उस चाप की ऊँचाई ४ गज है, तो वृत्त का व्यास बताओ ।

(७) किसी वृत्त का व्यास २५ फी० और उसकी एक चापजीवा २४ फी० है, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ ।

(८) एक वृत्त का व्यास २० इञ्च और उसकी एक चापजीवा १६ इञ्च है, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ ।

(९) किसी वृत्ताकार झील के किनारे से कोई जहाज उस झील की व्यास रेखा पर २ माइल चल कर एक तूफान के कारण पहली दिशा के लम्ब-रूप दिशा में मुड़ गया । इसके वाद ६ माइल चलने पर वह जहाज फिर किनारे पहुँच गया, तो झील की चौड़ाई बताओ ।

(१०) एक वृत्त की चापजीवा ३० इञ्च और केन्द्र से उसकी दूरी ८ इञ्च है, तो उस चाप की ऊँचाई बताओ।

(११) एक वृत्त की त्रिज्या १३ फी० है। यदि उसकी एक चापजीवा २४ फी० हो, तो केन्द्र से उसकी दूरी बताओ।

(१२) किसी वृत्त की त्रिज्या ८५ गज है। यदि उसकी एक चापजीवा ६८ गज है, तो केन्द्र से उसकी दूरी बताओ।

(१३) वृत्त के चाप के समान एक पुल का फैलाव १०० गज और उसकी ऊँचाई १० गज हैं, तो वृत्त की त्रिज्या बताओ।

(१४) वृत्त-चाप के आकार के एक पुल का फैलाव ४३२ गज और उसकी ऊँचाई ८ गज हैं, तो वृत्त का व्यास बताओ।

अथ वृत्तान्तस्त्र्यस्रादिनवास्रान्तक्षेत्राणां भुजमानानयनाय—
करणसूत्रं वृत्तत्रयम्।

त्रिद्व्यङ्काग्निनभश्चन्द्रैस्त्रिबाणाष्टयुगाष्टभिः।
वेदाग्निबाणखाश्वैश्च खखाभ्राभ्ररसैः क्रमात्॥ ४५॥
बाणेषुनखबाणैश्च द्विद्विनन्देषुसागरैः।
कुरामदशवेदैश्च वृत्तव्यासे समाहते॥ ४६॥
खखखाभ्रार्कसंभक्ते लभ्यन्ते क्रमशो भुजाः।
वृत्तान्तस्त्र्यस्रपूर्वाणां नवास्रान्तं पृथक् पृथक्॥ ४७॥

वृत्तान्तर्गत सम त्रिभुज से लेकर सम नवभुज क्षेत्र पर्यन्त सभी समभुज क्षेत्र के भुज जानने के लिये वृत्त के व्यास को क्रम से १०३९२३, ८४८५३, ७०५३४, ६००००, ५२०५५, ४५९२२, ४१०३१ इन संख्याओं से अलग-अलग गुणा कर सबों में १२०००० से भाग देना चाहिये। उक्त प्रकार से लब्धियाँ क्रम से सम त्रिभुजादि क्षेत्रों की भुजायें होती हैं।

उपपत्तिः—वृत्तान्तर्गतसमत्रिभुजादिक्षेत्रेषु क्रमेण परिधित्र्यंशादिपूर्णज्यासम एको भुजो भवति। ततः द्वादशायुतव्यासे सूक्ष्मज्यासाधनविधिना यदि समत्रिभुजादीनां भुजाः साध्यन्ते तदाते क्रमेण त्रिद्व्यङ्काग्निनभश्चन्द्रादिमिता

भवन्ति । ततोऽनुपातेनेष्टवृत्तव्यासे भुजानयनं सुलभं यथा—यदि द्वादशायुतव्यासे त्रिद्व्यङ्काग्निनभश्चन्द्रमितो भुजस्तदेष्टव्यासे क इतीष्टव्यासे वृत्तान्तर्गतसमत्रिभुजैकभुजः । एवं वृत्तान्तर्गतसमचतुर्भुजादीनामपि ज्ञेयम् ।

उदाहरणम् ।

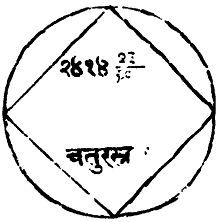
सहस्रद्वितयव्यासं यद्वृत्तं तस्य मध्यतः ।
समत्र्यस्रादिकानां मे भुजान् वद पृथक् पृथक् ॥ १ ॥

जिस वृत्त का व्यास २००० है, उस वृत्त के अन्तर्गत सम त्रिभुजादि क्षेत्रों का भुजमान अलग-अलग बताओ ।

अथ वृत्तान्तस्त्रिभुजे भुजमानानयनाय—

न्यासः । व्यासः २००० । त्रिद्व्यङ्काग्निनभश्चन्द्रै-(१०३९२३) गुणितः । (२०७८४६०००) खखखाभ्रार्कै—(१२००००) भक्तो लब्धं त्र्यस्रे भुजमानम् १७३२ $\frac{१}{२०}$ ।

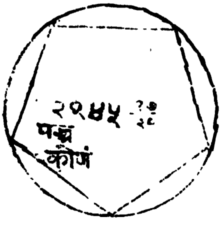
वृत्तान्तश्चतुर्भुजे भुजमानानयनाय—



न्यासः । व्यासः २००० । त्रिबाणाष्टयुगाष्टभि-(८४८५३) गुणितः (१६९७०६०००) खखखाभ्रार्कै— १२००००) भक्तो लब्धं चतुरस्रभुजमानम १४१४ $\frac{१३}{६०}$ ।

वृत्तान्तः पञ्चभुजे भुजमानानयनाय—

न्यासः ।



व्यासः २००० । वेदाग्निबाणखाश्वै—(७०५३४) गुणितः (१४१०६८०००) खखखाभ्रार्कै—(१२००००) भक्तो लब्धं पञ्चास्रे भुजमानम् ११७५ $\frac{१७}{३०}$ ।

न्यासः । वृत्तान्तः षड्भुजे भुजमानानयनाय—

न्यासः २००० । खखाभ्राभ्ररसै (६००००) गुणितः (१२०००००००) खखखाभ्रार्कै-(१२००००) भक्तो लब्धं षड्भुजमानम् १०००।

न्यासः । वृत्तान्तः सप्तभुजे भुजमानानयनाय—

न्यासः २००० । बाणेषुनखबाण-(५२०५५) गुणितः (१०४११००००) खखखाभ्रार्कै—(१२००००) भक्तो लब्धं सप्तास्रभुजमानम् ८६७ ७/१२ ।

न्यासः । वृत्तान्तरष्टभुजे भुजमानानयनाय—

न्यासः २००० । द्विद्विनन्देषुसागरै—(४५९२२) गुणितः (९१८४४०००) खखखाभ्रार्कै—(१२००००) भक्तो लब्धमष्टास्रभुजमानम् ७६५ ११/३० ।

न्यासः । वृत्तान्तर्नवभुजे भुजमानानयनाय—

न्यासः २००० । कुरामदशवेदै (४१०३१) गुणितः (८२०६२०००) खखखाभ्रार्कै (१२००००) भक्तो लब्धं नवास्रे भुजमानम् ६८३ १७/२० ।

एवमिष्टव्यासादिभ्यो ध्रुवकेभ्योऽन्या अपि जीवाः सिध्यन्तीति। तास्तु गोले ज्योत्पत्तौ वक्ष्ये।

उदाहरण—व्यास २००० को १०३९२३ से गुणा कर १२०००० से भाग देने पर लब्धि समत्रिभुज की एक भुज = $१७३२\frac{१}{२०}$। इसी तरह सम चतुर्भुजादि क्षेत्रों की भुजा का मान भी लाना चाहिये। शेष गणित की क्रिया मूल में स्पष्ट है।

अथ स्थूलजीवाज्ञानार्थं लघुक्रियाकरणसूत्रं वृत्तम्।

चापोननिघ्नपरिधिः प्रथमाह्वयः स्यात्
पञ्चाहतः परिधिवर्गचतुर्थभागः।
आद्योनितेन खलु तेन भजेच्चतुर्घ्न-
व्यासाहतं प्रथममाप्तमिह ज्यका स्यात्॥ ४८॥

चापोननिघ्नपरिधिः प्रथमाह्वयः स्यात्। परिधिवर्ग चतुर्थ भागः पञ्चाहतः कार्यः, आद्योनितेन तेन, खलु चतुर्घ्नव्यासाहतं प्रथमं भजेत्, आप्तं इह ज्यका स्यात्।

चाप को परिधि में घटा कर शेष को चाप से गुणा कर गुणनफल जो हो, उसका नाम प्रथम (आद्य) रखा गया है। बाद में परिधि-वर्ग के चतुर्थांश को ५ से गुणा कर उसमें प्रथम को घटाकर शेष से चतुर्गुणित व्यास से गुणे हुये प्रथम में भाग दें, तो जीवा होती है।

उपपत्तिः—अत्रेष्टचापमानम् = चा, परिधिः = प, व्यासः = व्या। अत्र ज्याशब्देन पूर्णज्या ज्ञातव्या। कल्प्यते ज्याचा = $\frac{\text{या}\,(\text{प} - \text{चा})\,\text{चा}}{\text{का} - (\text{प} - \text{चा})\,\text{चा}}$। अत्र

यदि चा = $\frac{\text{प}}{६}$ = ६०°, अतः ज्याचा = $\frac{\text{व्या}}{२}$।

$$\text{तदा}\quad \frac{\text{व्या}}{२} = \frac{\text{या}\left(\text{प} - \frac{\text{प}}{६}\right)\frac{\text{प}}{६}}{\text{का} - \left(\text{प} - \frac{\text{प}}{६}\right)\frac{\text{प}}{६}} = \frac{\text{या}\left(\frac{६\,\text{प} - \text{प}}{६}\right)\frac{\text{प}}{६}}{\text{का} - \left(\frac{६\,\text{प} - \text{प}}{६}\right)\frac{\text{प}}{६}}$$

$$= \frac{\text{या} \times \frac{५\,\text{प}^२}{३६}}{\text{का} - \frac{५\,\text{प}^२}{३६}} = \frac{\text{या} \times ५\,\text{प}^२ \times ३६}{(३६\,\text{का} - ५\,\text{प}^२)\,३६} = \frac{\text{या} \times ५\,\text{प}^२}{३६\,\text{का} - ५\,\text{प}^२}$$

$$\therefore \text{या} \times \text{प}^2 = \frac{\frac{\text{व्या}}{२}(३६\ \text{का} - ५\ \text{प}^2)}{५} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

एवं यदि चा $= \frac{\text{प}}{२}$ तदा ज्याचा = व्या,

$$\therefore \text{व्या} = \frac{\text{या}\left(\text{प} - \frac{\text{प}}{२}\right)\frac{\text{प}}{२}}{\text{का} - \left(\text{प} - \frac{\text{प}}{२}\right)\frac{\text{प}}{२}} = \frac{\text{या} \times \text{प}^2}{४\ \text{का} - \text{प}^2}$$

$$\therefore \text{या} \times \text{प}^2 = \text{व्या}\ (४\ \text{का} - \text{प}^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

(१), (२) समीकरणयोः साम्यात्

$$\frac{\text{व्या}}{२}\left(\frac{३६\ \text{का} - ५\ \text{प}^2}{५}\right) = \text{व्या}\ (४\ \text{का} - \text{प}^2)$$

$$\therefore ३६\ \text{का} - ५\ \text{प}^2 = १०\ (४\ \text{का} - \text{प}^2)$$

$$\therefore ३६\ \text{का} - ५\ \text{प}^2 = ४०\ \text{का} - १०\ \text{प}^2$$

$\therefore ४\ \text{का} = ५\ \text{प}^2, \quad \therefore \text{का} = \frac{५\ \text{प}^2}{४}$ । अनेन (२) समीकरणे उत्थापिते $\text{या} \times \text{प}^2 = \text{व्या}\left(\frac{४ \times ५\ \text{प}^2}{४} - \text{प}^2\right) = \frac{\text{व्या} \times १६\ \text{प}^2}{४}$

$= \text{व्या} \times ४\ \text{प}^2$ । $\therefore \text{या} = ४\ \text{व्या}$ । अथ या का मानाभ्यां 'ज्याचा' स्वरूपमुत्थापनेनाभीष्टचापपूर्णज्या

$$= \frac{४\ \text{व्या}\ (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा}}{\frac{५\ \text{प}^2}{४} - (\text{प} - \text{चा})\ \text{चा}}$$ अत्र (प − चा) = प्र = आ,

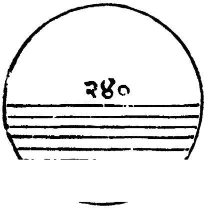
$$\therefore \text{ज्याचा} = \frac{४\ \text{व्या} \times \text{प्र}}{\frac{५\ \text{प}^2}{४} - \text{आ}}$$ अत उपपन्नम्

उदाहरणम् ।

अष्टादशांशेन वृतेः समानमेकादिनिघ्नेन च यत्र चापम् ।
पृथक् पृथक् तत्र वदाशु जीवां खार्कैर्मितं व्यासदलं च यत्र ॥

जिस वृत्त का व्यासार्ध १२० है और एकादि गुणित उस वृत्त का १८वाँ भाग चाप-मान है तो उनकी जीवा अलग-अलग शीघ्र बताओ ।

न्यासः । ७५४



न्यासः २४० । अत्र किलाङ्कलाघवाय विंशतेः सार्द्धार्केशतांशमिलितः सूक्ष्मपरिधिः ७५४ । अस्याष्टादशांशः ४२ । अत्राप्यङ्कलाघवाय' द्वयोरष्टादशांशयुतो गृहीतः । अनेन पृथक् पृथगेकादिगुणितेन तुल्ये धनुषि कल्पिते ज्याः साध्याः ।

अथ वाऽत्र सुखार्थं परिधेरष्टादशांशेन परिधिं धनूंषि चापवर्त्य ज्याः साध्यास्तथापि ता एव भवन्ति ।

अपवर्त्तिते न्यासः । परिधिः १८ । चापानि च १ । २ । ३ । ४ । ५ । ६ । ७ । ८ । ९ । यथोक्तकरणेन लब्धा जीवाः ४२ । ८२ । १२० । १५४ । १८४ । २०८ । २२६ । २३६ । २४० ।

उदाहरण—यहाँ व्यासार्ध १२० है, अतः व्यास २४० हुआ । इस पर से 'व्यासे भनन्दाग्निहते विभक्ते' इस सूत्र के अनुसार सूक्ष्म परिधि $=\frac{२४०\times३९२७}{१२५०}=७५३\frac{१२३०}{१२५०}$ हुई । यहाँ अङ्क लाघवार्थ ७५४ परिधि का मान माना । इसका १८वाँ भाग स्वल्पान्तर से ४२ को एक आदि अङ्कों से गुणा करने पर क्रम से ४२, ८४, १२६, १६८, २१०, २५२, २९४ ३३६ और ३७८ चाप हुए । अब उक्त परिधि और इन चापों को ४२ से अपवर्त्तन देने पर अपवर्त्तित परिधि = १८ और चाप-मान १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ और ९ हुए । अब इन इन चापों की जीवा बनाने के लिये सूत्र के अनुसार प्रथम चाप १ को परिधि १८ में घटा कर शेष १७ को चाप १ से गुणा करने पर १७ प्रथम हुआ । अब परिधि १८ के वर्ग ३२४ के चतुर्थांश ८१ को ५ से गुणा करने पर ४०५ में प्रथम १७ को घटा कर शेष ३८८ से, चतुर्गुणित व्यास २४० × ४ = ९६० से गुणे हुए प्रथम १७ में भाग देने पर $\frac{९६०\times१७}{३८८}$ $=४२\frac{२४}{३८८}$ हुआ । यहाँ शेष को छोड़ कर केवल ४२ प्रथम जीवा का मान हुआ । इसी तरह अन्य चापों की जीवा साधन करने पर क्रम से ८२, १२०, १५४, १८४, २०८, २२६, २३६ और २४० होनी है ।

अथ चापानयनाय करणसूत्रं वृत्तम् ।

व्यासाब्धिघातयुतमौर्विकया विभक्तो

जीवाङ्घ्रिपञ्चगुणितः परिधेस्तुवर्गः ।
लब्धोनितात् परिधिवर्गचतुर्थभागा-
दाप्ते पदे वृतिदलात् पतिते धनुः स्यात् ॥ ४९ ॥

जीवाङ्घ्रिपञ्चगुणितः परिधेः वर्गः व्यासाब्धिघातयुतमौर्विकया विभक्तः, लब्धोनितात् परिधिवर्गचतुर्थभागात् आप्ते पदे वृतिदलात् पतिते धनुः स्यात् ।

पञ्चगुणित जीवा के चतुर्थांश से परिधि-वर्ग को गुणा कर उसमें जीवा से युत चतुर्गुणित व्यास से भाग देकर लब्धि को परिधि-वर्ग के चतुर्थांश में घटा कर शेष का मूल जो हो, उसे परिधि के आधे में घटाने पर चाप का मान होता है ।

उपपत्तिः—चापोननिघ्नपरिधिरित्यादिना ज्यामानम् = ज्या

$$= \frac{४\,\text{व्या}\,(\text{प} - \text{चा})\,\text{चा}}{\frac{५\,\text{प}^2}{४} - (\text{प} - \text{चा})\,\text{चा}}, \quad \therefore \text{ज्या} \left\{ \frac{५\,\text{प}^2}{४} - (\text{प} - \text{चा})\,\text{चा} \right\}$$

$$= ४\,\text{व्या}\,(\text{प} - \text{चा})\,\text{चा},$$

$$\therefore \text{ज्या} \times \frac{५\,\text{प}^2}{४} = ४\,\text{व्या}\,(\text{प} - \text{चा})\,\text{चा} + \text{ज्या}\,(\text{प} - \text{चा})\,\text{च}$$

$$\because \text{ज्या} \times \frac{५\,\text{प}^2}{४} = (\text{प} - \text{चा})\,\text{चा}\,(४\,\text{व्या} + \text{ज्या}$$

$$\therefore \frac{\text{ज्या} \times \frac{५\,\text{प}^2}{४}}{४\,\text{व्या} + \text{ज्या}} = (\text{प} - \text{चा})\,\text{चा} = \text{प} \times \text{चा} - \text{चा}^2,$$

पक्षौ ऋणरूपेण संगुणितौ जातौ

$$- \frac{\text{ज्या} \times \frac{५\,\text{प}^2}{४}}{४\,\text{व्या} + \text{ज्या}} = \text{चा}^2 - \text{प} \times \text{चा}, \text{ पक्षयोः } \left(\frac{\text{प}^2}{४}\right) \text{ संयोज्य}$$

$$\text{मूलेन} - \sqrt{\frac{\text{प}^2}{४} - \frac{\text{ज्या} \times \frac{५\,\text{प}^2}{४}}{४\,\text{व्या} + \text{ज्या}}} = \frac{\text{प}}{२} - \text{चा},$$

$$\therefore \text{चा} = \frac{\text{प}}{२} - \sqrt{\frac{\text{प}^2}{४} - \left(\frac{\text{ज्या} \times \frac{५\,\text{प}^2}{४}}{४\,\text{व्या} + \text{ज्या}}\right)} \text{ अत उपपन्नम् ।}$$

उदाहरणम् ।

विहिता इह ये गुणास्ततो वद तेषामधुना धनुर्मितिम् ।
यदि तेऽस्ति धनुर्गुणक्रियागणिते गाणितिकातिनैपुणम् ॥ १ ॥

उदाहरण—हे गणितज्ञ, यदि तुम्हें चाप और जीवा के गणित में निपुणता है, तो पूर्वानीत जीवाओं का चाप-मान बताओ ।

न्यासः ४२ । ८२ । १२० । १५४ । १८४ । २०८ । २२६ । २३६ । २४० ।
स एवापवर्त्तितपरिधिः १८ व्यासा—(२४०) ब्धि (४) घात ९६० युतमौर्विक्रया-१००२ ऽनया जीवाङ्घ्रिणा $\frac{२१}{२}$ पञ्चभि ५ घ्न परिधे-१८ वर्गो ३२४ गुणितः १७०१० भक्तो लब्धः (१७) अत्राङ्कलाघवाय चतुर्विंशतेर्ह्यधिकसहस्रांशयुतो गृहीतोऽनेनोनितात् परिधि-१८ वर्ग-३२४ चतुर्थभागात् ६४ पदे प्राप्ते (८) वृति—(१८) दलात् (९) पतिते (१) जातं धनुः । एवं जातानि धनूंषि १ । २ । ३ । ४ । ५ । ६ । ७ । ८ । ९ । एतानि परिध्यष्टादशांशेन गुणितानि स्युः ।

इति श्रीभास्कराचार्यविरचितायां लीलावत्यां क्षेत्रव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—पूर्व साधित जीवा ४२, ८२, १२०, १५४ इत्यादि हैं । यहाँ प्रथम जीवा ४२ का चाप-मान लाना है, अतः पूर्वोक्त परिधि १८ के वर्ग ३२४ को पञ्च गुणित जीवा के चतुर्थांश $\frac{४२}{४} \times ५ = \frac{१०५}{२}$ से गुणा करने पर $\frac{३२४ \times १०५}{२} = १७०१०$ हुआ । इसे जीवा ४२ से युत चतुर्गुणित व्यास (४ × २४० + ४२ =) १००२ से भाग देने पर स्वल्पान्तर से लब्धि १७ को परिधि-वर्ग के चतुर्थांश ८१ में घटाने पर शेष ६४ के मूल ८ को परिधि १८ के आधे ९ में घटाने से शेष १ बचा । यही ४२ जीवा का चाप-मान हुआ । इसी तरह अन्य जीवाओं के चाप-मान क्रम से २, ३, ४, ५, ६, ७, ८ और ९ हुए । ये अपवर्त्तित मान हैं, अतः परिधि के १८ वाँ भाग ४२ से इन्हें गुणा करने पर सभी चापों के मान क्रम से ४२, ८४, १२६, १६८, २१०, २५२, २८४, ३३६ और ३७८ हुए ।

इति श्रीभास्कराचार्यविरचितायां लीलावत्यां तत्त्वप्रकाशिकाटीकोपेतः क्षेत्रव्यवहारः समाप्तः ।

अथ खातव्यवहारः

तत्र करणसूत्रं सार्द्धार्या

गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या।
स्थानकमित्या सममितिरेवं दैर्घ्ये च वेधे च ॥ १ ॥
क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसङ्ख्या स्यात्।

बहुषु स्थानेषु विस्तारं गणयित्वा तद्युतिः स्थानकमित्या (मापितस्थानसंख्यया) भाज्या तदा सममितिः स्यात्। एवं दैर्घ्ये वेधे च सममितिः साध्या। क्षेत्रफलं वेधगुणं खाते घनहस्तसङ्ख्या स्यात्।

जिस खात की लम्बाई, चौड़ाई और गहराई ये तीनों या इनमें से कोई दो या एक सर्वत्र समान नहीं हो, उसे असम खात कहते हैं। ऐसे खात के असम विस्तार को बहुत जगह में नाप कर उनके योग को नाप की स्थान-संख्या से भाग दें तो उसका सम-मान होता है। इसी तरह असम लम्बाई और गहराई को भी सम बनाना चाहिये। सम लम्बाई और चौड़ाई के गुणनफल-रूप क्षेत्रफल को सम वेध (गहराई) से गुणा करने पर खात में घन-हस्त का मान अर्थात् खात का घनफल होता है।

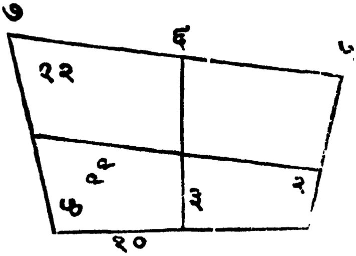
उपपत्तिः—आयाताधारखातस्य विस्तारदैर्घ्यवेधा यदि सर्वत्र न समास्तदाऽनेकेषु स्थानेषु तान्विगणय्य तद्युतिर्मापितस्थानसंख्यया भजनेन तेषां सममितिः स्यात्। समविस्तारदैर्घ्याभ्यामायतस्य क्षेत्रफलानयनं कर्त्तव्यम्। एतत्क्षेत्रफलतुल्यानि क्षेत्राणि खाते वेधमितान्यत इदं क्षेत्रफलं वेधगुणितं तदा खातस्य घनफलं स्यादत उपपन्नम्।

उदाहरणम्।

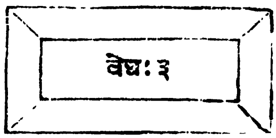
भुजवक्रतया दैर्घ्यं दशेशार्ककरैर्मितम्।
त्रिषु स्थानेषु षट्पञ्चसप्तहस्ता च विस्तृतिः ॥ १ ॥
यस्य खातस्य वेधोऽपि द्विचतुस्त्रिकरः सखे।
तत्र खाते कियन्तः स्युर्घनहस्तान् प्रचक्ष्व मे ॥ २ ॥

किसी खात को टेढ़ा होने के कारण तीन जगह की लम्बाई १०, ११ और १२ हाथ, तीन जगह की चौड़ाई ५, ६ और ७ हाथ तथा तीन स्थानों के वेध २, ३ और ४ हाथ हैं, तो उस खात का घनफल बताओ।

तत्क्षेत्रदर्शनम् ।



अत्र सममितिकरणेन विस्तारे हस्ताः ६ । दैर्घ्ये ११ । वेधे च ३ । तथा कृते क्षेत्रदर्शनम् ।



उदाहरण—तीन स्थान में दैर्घ्य के योग = १० + ११ + १२ = ३३ हाथ को स्थान संख्या ३ से भाग देने पर लब्धि ११ हाथ दैर्घ्य का सममान हुआ। इसी तरह तीन जगह की चौड़ाई के योग (५ + ६ + ७ =) १८ को, स्थान संख्या ३ से भाग देने पर ६ हाथ चौड़ाई का सम मान हुआ। एवं तीन स्थानों के वेध के योग को स्थान-संख्या ३ से भाग देने पर ($\frac{२+३+४}{३}$ हाथ =) ३ हाथ वेध का सम मान हुआ। अब समदैर्घ्य ११ को समविस्तार (चौड़ाई) ६ से गुणा करने पर ११ × ६ = ६६ सम क्षेत्रफल हुआ। इसको समवेध ३ से गुणा करने पर ६६ × ३ = १९८ खात का घनहस्त मान हुआ।

खातान्तरे करणसूत्रं सार्धवृत्तम् ।

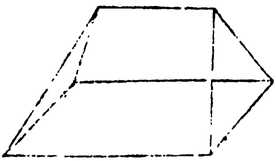
मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं हृतं षड्भिः ॥ २ ॥
क्षेत्रफलं सममेवं वेधहतं घनफलं स्पष्टम् ।

समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति ॥ ३ ॥

मुखजतलजतद्युतिजक्षेत्रफलैक्यं षड्भिः हृतं एवं समं क्षेत्रफलं स्यात्। (क्षेत्रफलं) वेधहतं स्पष्टं घनफलं भवति। समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति।

जिस खात में मुख की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से तल की लम्बाई और चौड़ाई के बराबर नहीं हो, उस खात में मुख के क्षेत्रफल, तल के क्षेत्रफल और मुख की लम्बाई तथा चौड़ाई में क्रम से तल की लम्बाई और चौड़ाई को जोड़ने पर जो क्षेत्रफल हो, इन तीनों के योग को ६ से भाग देने पर सम क्षेत्रफल होता है। इसको वेध से गुणा करने पर खात का स्पष्ट घनफल होता है। सम खात के घनफल का $\frac{1}{3}$ सूची खात का घनफल होता है।

उपपत्तिः—यस्मिन् खाते मुखायतस्य दैर्घ्यविस्ताराभ्यां तलायतस्य दैर्घ्यविस्तृतिमानेऽल्पे तत्र तलदैर्घ्यविस्ताराभ्यां स्वस्वाभिमुखभूतलयोः समानान्तरधरातलकरणेनैकायताधारिका सूची, तत्पार्श्वे द्वे त्रिभुजाधारखातक्षेत्रे तथा तलायताधारं समखातक्षेत्रमिति क्षेत्रचतुष्टयं सञ्जायते। अत्र कल्प्येते मुखायतस्य



दैर्घ्यविस्तृती क्रमेण दै, वि, तथा तलायतस्य दैर्घ्यविस्तृती क्रमेण दै' वि' एवं वेधः = वे। तेनायताधारसूच्या आधारस्य दैर्घ्यम् = (दै−दै'), तथा विस्तृतिः=(वि−वि')। एवं त्रिभुजाधारखातयोराधारयोर्दैर्घ्ये, दै', वि', तथा तयोर्विस्तृती क्रमेण (वि−वि'), (दै−दै')। ततः सूचीघनफलविधिना-यताधारसूच्या घनफलम् $= \frac{(\text{वि}-\text{वि}')(\text{दै}-\text{दै}')\text{वे}}{3}$। त्रिभुजाधारखातयोर्घनफले-क्रमेण $\frac{(\text{वि}-\text{वि}')\text{दै}'\times\text{वे}}{2}$, $\frac{(\text{दै}-\text{दै}')\text{वि}'\times\text{वे}}{2}$। तथा तलायताधारसमखातस्य घनफलम् = वि' × दै' × वे। सर्वेषां योगोऽभीष्टखातस्य घनफलम्

$$= \frac{(\text{वि}-\text{वि}')(\text{दै}-\text{दै}')\text{वे}}{3} + \frac{(\text{वि}-\text{वि}')\text{दै}'\cdot\text{वे}}{2} + \frac{(\text{दै}-\text{दै}')\text{वि}'\cdot\text{वे}}{2}$$
$$+ \text{वि}'\times\text{दै}'\times\text{वे}$$

$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ २ (\text{वि} - \text{वि}') (\text{दै} - \text{दै}') + ३ (\text{वि} - \text{वि}')\, \text{दै} + ३ (\text{दै} - \text{दै}')$$

$$\text{वि} + ६\, \text{वि} \times \text{दै} \}$$

$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ (\text{वि} - \text{वि}') (२\, \text{दै} - २\, \text{दै}' + ३\, \text{दै}') + ३\, \text{वि} (\text{दै} - \text{दै}' + २\, \text{दै}) \}$$

$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ (\text{वि} - \text{वि}') (२\, \text{दै} + \text{दै}') + ३\, \text{वि} (\text{दै} + \text{दै}') \}$$

$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ २\, \text{वि}\cdot\text{दै} - २\, \text{वि}'\cdot\text{दै} + \text{वि}\cdot\text{दै}' - \text{वि}'\cdot\text{दै}' + ३\, \text{वि}'\cdot\text{दै} + ३\, \text{वि}'\cdot\text{दै}' \}$$

$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ २\, \text{वि}\cdot\text{दै} + २\, \text{वि}'\cdot\text{दै}' + \text{वि}\cdot\text{दै}' + \text{वि}'\cdot\text{दै} \}$$

$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ \text{वि}\cdot\text{दै} + \text{वि}'\cdot\text{दै}' + \text{वि}\, \text{दै} + \text{वि}'\cdot\text{दै}' + \text{वि}\cdot\text{दै}' + \text{वि}'\, \text{दै} \}$$

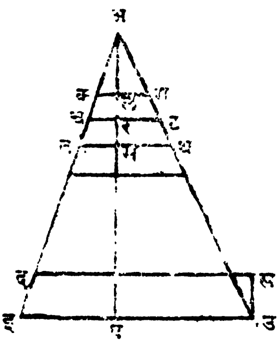
$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ \text{वि}\cdot\text{दै} + \text{वि}'\, \text{दै}' + \text{दै} (\text{वि} + \text{वि}') + \text{दै}' (\text{वि} + \text{वि}') \}$$

$$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ \text{वि}\cdot\text{दै} + \text{वि}'\cdot\text{दै}' + (\text{वि} + \text{वि}') (\text{दै} + \text{दै}') \}$$

$= \frac{\text{वे}}{\text{ह}}\{ \text{मु}\cdot\text{फ} + \text{त}\cdot\text{फ} + \text{तद्युतिजक्षेत्रफल} \}$ अत उपपन्नं खातघनफलानयन पर्यन्तम् ।

अथ सूचीघनफलसाधनम् ।

कल्प्यते अ इ उ सूचीं, यस्या वेधः = अ प । अ प वेधस्य न विभागं कृत्वा प्रतिविभागान्तबिन्दोराधारस्य समानान्तर-भूतलं कार्यं तदा सूच्याः न मितानि खण्डानि भविष्यन्ति, यथा अ क ग, क ग ट च, च ट थ त इत्यादि । अत्र सूची खण्डानामति सूक्ष्मत्वात्स्वल्पान्तरात्तेषां समघनक्षेत्रत्वम् ।



अथ अ ल $\frac{\text{अ प}}{\text{न}}$, अ र = $\frac{२\ \text{अ प}}{\text{न}}$, अ म = $\frac{३\ \text{अ प}}{\text{न}}$ इत्यादि । ततः प्रथम सूची खण्डस्य दैर्घ्यम् = $\frac{\text{मु}\cdot\text{दै} \times \text{अ प}}{\text{अ प} \times \text{न}} = \frac{\text{मु}\cdot\text{दै}}{\text{न}}$,

अस्य विस्तृतिः = $\frac{\text{मु}\cdot\text{वि} \times \text{अ प}}{\text{अ प} \times \text{न}} = \frac{\text{मु}\cdot\text{वि}}{\text{न}}$ । अतः प्रथम खण्डस्य क्षेत्रफलम्

$= \frac{\text{मु·दै} \times \text{मु·वि·}}{\text{न} \times \text{न}} = \frac{\text{मु·फ}}{\text{न}^2}$ । इदं वेधेना $\frac{\text{अ प}}{\text{न}}$ ने न गुणितं जातं प्रथम खण्डस्य घनफलम् $= \frac{\text{मु फ}}{\text{न}^2} \times \frac{\text{अ प}}{\text{न}} = \frac{\text{मु·फ} \times \text{अ प}}{\text{न}^3}$ । एवं द्वितीयखण्डस्य दैर्घ्यम् $= \frac{\text{मु·दै} \times \text{२ अ प}}{\text{अ प} \times \text{न}} = \frac{\text{मु·दै} \times \text{२}}{\text{न}}$ । द्वितीयखण्डस्य विस्तृतिः $= \frac{\text{मु·वि} \times \text{२ अ प}}{\text{अ प} \times \text{न}}$ $= \frac{\text{मु·वि} \times \text{२}}{\text{न}}$ । $\therefore$ द्वितीयखण्डस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{\text{मु·दै} \times \text{२}}{\text{न}} \times \frac{\text{मु·वि} \times \text{२}}{\text{न}}$ $= \frac{\text{४ मु फ}}{\text{न}^2}$ । $\therefore$ द्वितीयखण्डस्य घनफलम् $= \frac{\text{४ मु·फ}}{\text{न}^2} \times \frac{\text{अ प}}{\text{न}}$ $= \frac{\text{४ मु·फ} \times \text{अ प}}{\text{न}^3}$ । एवमेव तृतीयखण्डस्य दैर्घ्यविस्तृती क्रमेण $= \frac{\text{मु·दै} \times \text{३}}{\text{न}}$, $\frac{\text{मु·वि} \times \text{३}}{\text{न}}$ । $\therefore$ तृतीयखण्डस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{\text{९ मु·फ}}{\text{न}^2}$ । $\therefore$ तृतीयखण्डस्य घनफलम् $= \frac{\text{९ मु·फ}}{\text{न}^2} \times \frac{\text{अ प}}{\text{न}} = \frac{\text{९ मु·फ} \times \text{अ प}}{\text{न}^3}$ । एवमग्रेऽपि । अथान्तिमखण्डस्य घनफलम् $= \frac{\text{न}^2 \times \text{मु·फ} \times \text{अ प}}{\text{न}^3}$

सर्वेषां घनफलानां योगः = सूचीघनफलम् ।

$$= \frac{(\text{मु·फ} + \text{४ मु·फ} + \text{९ मु·फ} + \text{१६ मु·फ} + \cdots\cdots + \text{न}^2 \times \text{मु·फ})\ \text{अ प}}{\text{न}^3}$$

$= \frac{\text{मु फ} \times \text{अ प}}{\text{न}^3} (\text{१} + \text{४} + \text{९} + \text{१६} + \cdots\cdots + \text{न}^2)$ । परञ्चात्र अ प = सूचीवेधस्तथा $(\text{१} + \text{४} + \text{९} + \text{१६} + \cdots\cdots + \text{न}^2)$ = एकाद्यङ्कानां कृतियोगः $= \left(\frac{\text{२ न} + \text{१}}{\text{३}}\right) \left(\frac{\text{न} + \text{१}}{\text{२}}\right)$ न ।

$$\therefore \text{ सूचीघनफलम्} = \frac{\text{मु फ} \times \text{वे}}{\text{न}^3} \cdot \frac{(\text{२ न} + \text{१})(\text{न} + \text{१})\ \text{न}}{\text{६}}$$

$$= \frac{\text{मु फ} \times \text{वे}}{\text{न}^2} \cdot \frac{(\text{२ न}^2 + \text{३ न} + \text{१})}{\text{६}}$$

$$= \text{मु·फ} \times \text{वे} \left(\frac{\text{२ न}^2}{\text{६ न}^2} + \frac{\text{३ न}}{\text{६ न}^2} + \frac{\text{१}}{\text{६ न}^2}\right) = \text{मु फ} \times \text{वे} \left(\frac{\text{१}}{\text{३}} + \frac{\text{१}}{\text{२न}} + \frac{\text{१}}{\text{६न}^2}\right)$$

अत्र न मानं यथा यथाऽधिकं कल्प्यते तथा तथेदं सूचीघनफलं वास्तव-सूचीघनफलासन्नं भवेदेवं यदि न = ∞ तदा $\frac{१}{२न} + \frac{१}{६न^{२}} = ०$

$\therefore$ सूचीघनफलम् = $\frac{मु·फ \times वे}{३}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

मुखे दशद्वादशहस्ततुल्यं विस्तारदैर्घ्यं तु तले तदर्धम् ।
यस्याः सखे सप्तकरश्च वेधः का खातसंख्या वद तत्र वाप्याम् ॥ १ ॥

जिस वापी के मुख की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १२ हाथ और १० हाथ तथा उसके तल की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से ६ हाथ और ५ हाथ हैं, एवं हे मित्र ! जिसका वेध (गहराई) ७ हाथ हैं उसकी खात संख्या बताओ ।

न्यासः १२

७

मुखजं क्षेत्रफलम् १२० । तलजम् ३० । तद्युतिजम् २७० । एषामैक्यम् ४२० । षड्भि (६) र्हृतं जातं समफलम् ७० । वेधहृतं जातं खातफल घनहस्ताः ४९० ।

उदाहरण—यहाँ मुख की लम्बाई और चौड़ाई क्रम से १२ हाथ और १० हाथ हैं, अतः सूत्र के अनुसार मुख का क्षेत्रफल = १२ × १० = १२० वर्ग हाथ । एवं तल की लम्बाई ६ को तल की चौड़ाई से गुणा करने पर तल का क्षेत्रफल = ६ × ५ = ३० व· हाथ । इसी तरह मुख की लम्बाई और चौड़ाई में क्रम से तल की लम्बाई और चौड़ाई जोड़ने पर मुख और तल के योग से उत्पन्न क्षेत्र की लम्बाई = १२ + ६ = १८ हाथ और उसकी चौड़ाई = १० + ५ = १५ हाथ । अतः उस क्षेत्र का फल = १८ × १५ = २७० व· हाथ । अब मुखज, तलज और तद्युतिज क्षेत्रों के फल का योग = १२० + ३० + २७० = ४२० व· हाथ हुआ । इसको ६ से भाग देने पर ४२० ÷ ६ = ७० सम फल हुआ । इसको वेध ७ से गुणा करने पर ७० × ७ = ४९० घन हाथ, खात का फल हुआ ।

द्वितीयोदाहरणम् ।

खातेऽथ तिग्मकरतुल्यचतुर्भुजे च
किं स्यात् फलं नवमितः किल यत्र वेधः ।
वृत्ते तथैव दशविस्तृतिपञ्चवेधे
सूचीफलं वद तयोश्च पृथक्-पृथक् मे ॥ २ ॥

जिस तुल्य चतुर्भुज खात की भुजा १२ और वेध ९ है उसका घन फल बताओ । एवं जिस वृत्त का व्यास १० और वेध ५ हैं, उसका घनफल बताओ और उन दोनों क्षेत्र का सूची घनफल अलग-अलग कहो ।

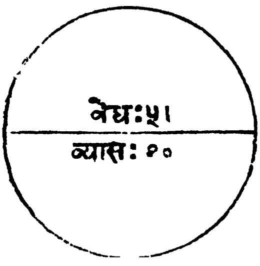
न्यासः

भुजः १२ । वेधः ९ । जातं यथोक्तकरणेन खात-

२२ फलं घनहस्ताः १२९६ । सूचीफलं ४३२

वृत्तखातदर्शनाय

न्यासः



व्यासः १० । वेधः ५ । अत्र सूक्ष्मपरिधिः $\frac{३९२७}{१२५}$ । सूक्ष्मक्षेत्रफलम् $\frac{३९२७}{५०}$ । वेधगुणं जातं खातफलम् $\frac{३९२७}{१०}$ । सूक्ष्मसूचीफलम् $\frac{१३०९}{१०}$ । यद्वा स्थूलखातफलम् $\frac{२७५०}{७}$ । सूचीफलं स्थूलं वा $\frac{२७५०}{२१}$ ।

इति खातव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—यहाँ तुल्य चतुर्भुज (वर्गाकार) खात की भुजा १२ है, अतः उसका क्षेत्रफल = $१२^२$ = १४४ हुआ । इसको वेध ९ से गुणा करने पर १४४ × ९ = १२९६ खात घनफल हुआ । इसको ३ से भाग देने पर १२९६ ÷ ३ = ४३२ सूची घनफल हुआ । वृत्त के व्यास १० को 'व्यासे भनन्दाग्निहते' इस सूत्र के अनुसार, ३९२७ से गुणा कर १२५० से भाग देने

पर $\frac{10\times3927}{1250}=\frac{3927}{125}$ सूक्ष्म परिधि हुई। इसको व्यास से गुणा कर ४ से भाग देने पर $\frac{3927\times10}{125\times4}=\frac{3927}{50}$ सूक्ष्म क्षेत्रफल हुआ। इसको वेध ५ से गुणा करने पर $\frac{3927\times5}{50}=\frac{3927}{10}$ खातफल हुआ। इसका तीसरा भाग $\frac{3927}{10\times3}=\frac{1309}{10}$ सूक्ष्म सूचीफल हुआ। अथवा स्थूल परिधि $=\frac{10\times22}{7}=\frac{220}{7}$ इसको व्यास १० से गुणा कर ४ से भाग देने पर $\frac{220\times10}{7\times4}=\frac{550}{7}$ स्थूल फल हुआ। इसको वेध ५ से गुणा करने पर $\frac{550\times5}{7}$ $=\frac{2750}{7}$ स्थूल खातफल हुआ। इसको ३ से भाग देने पर $\frac{2750}{3\times7}=\frac{2750}{21}$ यह स्थूल सूचीफल हुआ।

इति खातव्यवहारः समाप्तः।

चितौ करणसूत्रं सार्धवृत्तम्।

उच्छ्रयेण गुणितं चितेः किल क्षेत्रसम्भवफलं घनं भवेत्।
इष्टिकाघनहृते घने चितेरिष्टिकापरिमितिश्च लभ्यते ॥ १ ॥
इष्टिकोच्छ्रयहृदुच्छ्रितिश्चितेः स्युः स्तराश्च दृषदां चितेरपि।

चितेः क्षेत्रसम्भवफलं उच्छ्रयेण गुणितं घनं भवेत्। चितेः घने इष्टिकाघनहृते सति इष्टिकापरिमितिः लभ्यते। चितेः उच्छ्रितिः इष्टिकोच्छ्रयहृत् स्तराः (पङ्क्तयः) स्युः। एवं दृषदां चितेः अपि (घनफलादिकं ज्ञेयम्)।

उपर्युपरि क्रम से रक्खे गये ईंट पत्थर आदि के समूह (ढेर) को चिति कहते हैं। चिति के क्षेत्रफल को उसकी ऊँचाई से गुणा करने पर चिति का घनफल होता है। उस घनफल को ईंट के घनफल से भाग देने पर ईंट का मान होता है। चिति की ऊँचाई को ईंट की ऊँचाई से भाग देने पर ईंटों की पङ्क्ति होती है। इसी तरह पत्थर की चिति का भी फल समझना चाहिये।

उपपत्तिः—अथ क्षेत्रफलं वेधेन गुणितं घनफलं भवतीत्युक्त्या चितेर्दैर्घ्यविस्तृतिघातरूपं फलं तस्या वेधमितेन उच्छ्रित्या गुणितं जातं घनफलम्। एवमेवैकस्या इष्टिकाया घनफलमानीयानुपातः-यदीष्टिकाघनफलेनैकेष्टिका लभ्यते तदा चितेर्घनफलेन किमिति जातं चिताविष्टिकामानम् $=\frac{\text{चि. घ.}\times1}{\text{इ. घ.}}=\frac{\text{चि. घ.}}{\text{इ. घ.}}$।

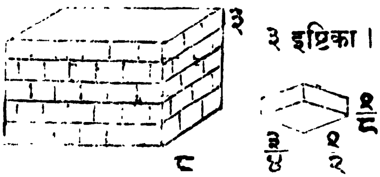
एवमिष्टिकोच्छ्रित्या यद्येकः स्तरस्तदा चित्युच्छ्रित्या किमिति जातं स्तरमानम्
$= \frac{१ \times \text{चि. उ.}}{\text{इ. उ.}} = \frac{\text{चि. उ.}}{\text{इ. उ.}}$ इत्युपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

अष्टादशाङ्गुलं दैर्घ्यं विस्तारो द्वादशाङ्गुलः ।
उच्छ्रितिस्त्र्यङ्गुला यस्यामिष्टिकास्ताश्चितौ किल ॥ १ ॥
यद्विस्तृतिः पञ्चकराष्टहस्तं दैर्घ्यञ्च यस्यां त्रिकरोच्छ्रितिश्च ।
तस्यां चितौ किं फलमिष्टिकानां सङ्ख्या च का ब्रूहि कति स्तराश्च ॥२॥

किसी चिति में प्रत्येक ईंट की लम्बाई, चौड़ाई और उँचाई क्रम से १८ अंगुल, १२ अंगुल और ३ अंगुल हैं। यदि उस चिति की चौड़ाई, लम्बाई और उँचाई क्रम से ५, ८ और ३ हाथ हों, तो उसमें ईंट की संख्या और पङ्क्ति कितनी हैं यह बताओ।

न्यासः इष्टिकाचितिः ।



इष्टिकाया घनहस्तमानम् $\frac{३}{६४}$ चितेः क्षेत्रफलम् ४० । उच्छ्रयेण ३ गुणितं चितेर्घनफलं १२० । लब्धा २५६० इष्टिकासंख्याः । स्तरसंख्याः २४ । एवं पाषाणचितावपि ।

इति चितिव्यवहारः ।

उदाहरण—यहाँ चिति की लम्बाई ८ हाथ को उसकी चौड़ाई ५ हाथ से गुणा करने पर $८ \times ५ = ४०$ व. हाथ चिति का क्षेत्रफल हुआ। इसको चिति की उँचाई ३ हाथ से गुणा कर $४० \times ३ = १२०$ घन हाथ चिति का घनफल हुआ। अब एक ईंट की लम्बाई १८ अंगुल को २४ से भाग देने पर $\frac{१८}{२४} = \frac{३}{४}$ हाथ उसकी लम्बाई हुई। इसी तरह ईंट की चौड़ाई १२ अंगुल और उँचाई ३ अंगुल को २४ से भाग देने पर चौड़ाई का हस्तात्मक मान $= \frac{१२}{२४} = \frac{१}{२}$, तथा उँचाई का हस्तात्मक मान $\frac{३}{२४} = \frac{१}{८}$ हुए। अब ईंट की लम्बाई, चौड़ाई और उँचाई का घात करने पर $\frac{३}{४} \times \frac{१}{२} \times \frac{१}{८} = \frac{३}{६४}$ घ. हाथ एक ईंट का घनफल हुआ। चिति के घनफल १२० में ईंट के घनफल $\frac{३}{६४}$ से भाग देने पर $१२० \div \frac{३}{६४} = \frac{१२० \times ६४}{३} = २५६०$ ईंटें की संख्या हुई। चिति

की ऊँचाई ३ हाथ में ईंट की ऊँचाई $\frac{1}{8}$ से भाग देने पर $३ \div \frac{1}{8} = \frac{३ \times ८}{१} = २४$ ईंटे की पङ्क्ति हुई। इसी तरह पत्थर की चिति में भी फल आदि लाना चाहिये।

इति चिति व्यवहारः।

अथ क्रकचव्यवहारे करणसूत्रं वृत्तम्।

पिण्डयोगदलमग्रमूलयोर्दैर्घ्यसङ्गुणितमङ्गुलात्मकम् ॥ २ ॥
दारुदारणपथैः समाहतं षट्स्वरेषु विहृतं करात्मकम्।

अग्रमूलयोः पिण्डयोगदलं दारुदारणपथैः समाहतं फलं चेत् अङ्गुलात्मकं तदा षट्स्वरेषु विहृतं करात्मकं भवति।

जिस लकड़ी की चिराई करानी हो उसके अग्र और जड़ की मुटाई के योग के आधे को लकड़ी की लम्बाई से गुणा कर जो हो, उसे लकड़ी जितनी जगह चीरी गई हों उतनी संख्या से गुणा करने पर यदि फल अंगुलात्मक हो, तो उसे ५७६ से भाग दें तो हस्तात्मक मान होता है।

उपपत्तिः—अथ कस्मिन्नपि काष्ठे पिण्डस्य सममितिरानयनार्थमग्रमूलयोः पिण्डयोर्योगदलं कृतम्। तद्यदि काष्ठदैर्घ्येण गुणितं तदा क्षेत्रफलं भवतीति स्पष्टमेव। यदि काष्ठस्य पिण्डदैर्घ्येऽङ्गुलात्मके तदा ते चतुर्विंशत्या भक्ते जाते हस्तात्मके, ताभ्यां काष्ठस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{\text{पिण्डाङ्गुल}}{२४} \times \frac{\text{दैर्घ्याङ्गुल}}{२४}$

$= \frac{\text{पिण्डाङ्गुल} \times \text{दैर्घ्याङ्गुल}}{५७६}$। ततोऽनुपातः—यद्येकेन दारणपथेनेदं फलं तदाभीष्ट-दारणपथैः किमिति हस्तात्मकं दारणमानम् $= \frac{\text{पिण्डाङ्गुल} \times \text{दैर्घ्याङ्गुल} \times \text{दा. प.}}{५७६}$ अत उपपन्नम्।

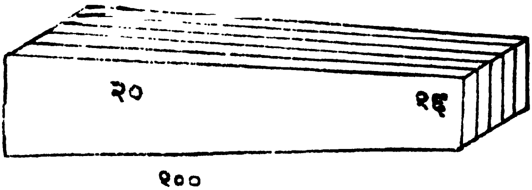
उदाहरणम्।

मूले नखाङ्गुलमितोऽथ नृपाङ्गुलोऽग्रे
पिण्डः शताङ्गुलमितं किल यस्य दैर्घ्यम्।
तद्दारुदारणपथेषु चतुर्षु किं स्या-
द्धस्तात्मकं वद सखे गणितं द्रुतं मे ॥ १ ॥

किसी लकड़ी की मुटाई जड़ में २० अंगुल और अग्र में १६ अंगुल है।

यदि उसकी लम्बाई १०० अंगुल हो और वह ४ जगह चीरी गई हो, तो हे मित्र ! उसका हस्तात्मक मान शीघ्र बताओ ।

न्यासः ।



पिण्डयोगदलं १८ दैर्ध्येन १०० सङ्गुणितम् १८०० । दारुदारणपथै (४) गुणितम् ७२०० । षट्स्वरेषु ५७६ विहृतं जातं करात्मकं गणितम् $\frac{२५}{२}$ ।

उदाहरण—यहाँ मूल की मुटाई २० अंगुल और अग्र की मुटाई १६ अंगुल है, तो सूत्र के अनुसार इन दोनों के योगार्ध $\frac{३०+१६}{२} = \frac{३६}{२} = १८$ अंगुल को लकड़ी की लम्बाई १०० अंगुल से गुणा करने पर १८×१०० $= १८००$ वर्गांङ्गुल हुआ । इसको दारण पथ ४ से गुणा करने पर फल $१८०० \times ४ = ७२००$ वर्गांङ्गुल हुआ । इसको ५७६ से भाग देने पर $\frac{७२००}{५७६} = \frac{२५}{२}$ वर्ग हाथ फल हुआ ।

क्रकचान्तरे करणसूत्रं सार्धवृत्तम् ।

छिद्यते तु यदि तिर्यगुक्तवत् पिण्डविस्तृतिहतेः फलं तदा ॥ ३ ॥
इष्टिकाचितिदृषच्चितिखातक्राकचव्यवहृतौ खलु मूल्यम् ।
कर्मकारजनसम्प्रतिपत्त्या तन्मृदुत्वकठिनत्ववशेन ॥ ४ ॥

यदि तु तिर्यक् छिद्यते तदा उक्तवत् पिण्डविस्तृतिहतेः फलं स्यात् । इष्टिकाचितिदृषच्चितिखातक्राकचव्यवहृतौ खलु तन्मृदुत्वकठिनत्ववशेन कर्मकारजनसम्प्रतिपत्त्या मूल्यं भवतीति ।

यदि लकड़ी को तिरछी अर्थात् चौड़ाई के रूप में चीरा जाय, तो 'पिण्डयोगदलमग्रमूलयोः' इस सूत्र के अनुसार मुटाई को लकड़ी की चौड़ाई से गुणा करने पर फल होता है । ईंटे की चिति पत्थर की चिति, खात और क्रकच व्यवहार में कारीगर (काम करने वाले) की योग्यता तथा उन वस्तुओं की कोमलता एवं कठिनता के अनुसार मूल्य होता है ।

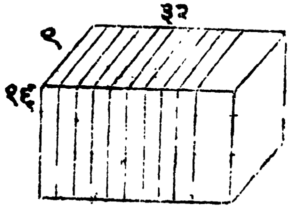
उपपत्तिः—यदि तिर्यक् छेदनेऽग्रमूलयोः पिण्डे समे तदा पिण्डविस्तृतिघातसमं क्षेत्रफलं स्पष्टमेव। विदारणाविमूल्यं तु कारुजनस्य कौशल्येन पदार्थस्य मृदुत्वकठिनत्ववशेन च निर्द्धार्यते इति सयुक्तिकमेवोक्तं भास्करेण।

उदाहरणम्।

यद्विस्तृतिर्दन्तमिताङ्गुलानि पिण्डस्तथा षोडश यत्र काष्ठे।
छेदेषु तिर्यङ्नवसु प्रचक्ष्व किं स्यात् फलं तत्र करात्मकं मे ॥ १ ॥

जिस लकड़ी की चौड़ाई ३२ अंगुल और मुटाई १६ अंगुल है, उसको चौड़ाई में ९ जगह चीरे जायँ तो हस्तात्मक फल क्या होगा, यह बताओ।

न्यासः।



विस्तारः ३२। पिण्डः १६। पिण्डविस्तृतिहतिः ५१२। मार्गं ९ घ्नी ४६०८। षट्स्वरेषु ५७६ विहृता जातं फलं हस्ताः ८।

इति क्रकचव्यवहारः।

उदाहरण—यहाँ लकड़ी की मुटाई १६ अंगुल को उसकी चौड़ाई ३२ अंगुल से गुणा कर १६ × ३२ = ५१२ व. अंगुल को छेदन संख्या ९ से गुणा करने पर ५१२ × ९ = ४६०८ व. अंगुल हुआ। इसको ५७६ से भाग देने पर ४६०८ ÷ ५७६ = ८ हस्तात्मक फल हुआ।

इति क्रकचव्यवहारः।

अथ राशिव्यवहारे करणसूत्रं वृत्तम्।

अनणुषु दशमांशोऽणुष्वथैकादशांशः
परिधिनवमभागः शूकधान्येषु वेधः।
भवति परिधिषष्ठे वर्गिते वेधनिघ्ने
घनगणितकराः स्युर्मागधास्ताश्च खार्यः ॥ १ ॥

अनणुषु धान्येषु (परिधेः) दशमांशः वेधः स्यात्, अथ अणुधान्येषु

एकादशांशः वेधः स्यात्, शूकधान्येषु परिधिनवमभागः वेधः भवति। परिधि-षष्ठे वर्गिते वेधनिघ्ने सति घनगणितकराः स्युः, ताः मागधाः खार्यः च स्युः।

मोटे धान के ढेर में परिधि का $\frac{1}{10}$ वेध होता है। छोटे धान के ढेर में परिधि का $\frac{1}{11}$ और शूक-धान में परिधि का $\frac{1}{9}$ वेध होता है। परिधि के छठे भाग के वर्ग को वेध से गुणा करने पर घन-हस्त का मान होता है, जो मगध देश में खारी कहलाती है।

उपपत्ति—अथ स्थूलसूक्ष्मशूकधान्येषु क्रमेण परिधिदशमैकादशनवम, भागो वेधो भवतीत्यत्रोपलब्धिरेव प्रमाणम्। यदि धान्यराशेः परिधिः = प, तदेयं सप्तभिः संगुण्य द्वाविंशत्या भक्तं जातं स्थूलव्याससमानम् $= \frac{\text{प} \times ७}{२२}$ $= \frac{\text{प}}{३}$, स्वल्पान्तरात्। ततः परिधिगुणितव्यासपादः फलमित्यादिना क्षेत्रफलम् $= \frac{\text{प} \times \text{व्या}}{४} = \frac{\text{प} \times \text{प}}{३ \times ४} = \frac{\text{प}^२}{१२}$। इदं क्षेत्रफलं वेधेन गुणितं जातं समघनफलम् $= \frac{\text{प}^२ \times १२}{१२}$। अस्य त्र्यंशः सूचीघनफलम् $= \frac{\text{प}^२ \times \text{वे}}{१२ \times ३} = \frac{\text{प}^२ \times \text{वे}}{३६} = \left(\frac{\text{प}}{६}\right)^२ \times \text{वे}$, इदं धान्यराशेर्घनहस्तप्रमाणम्। इदमेव मागधदेशखारीति परिभाषया स्पष्टमत उपपन्नम्।

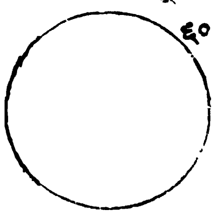
उदाहरणम्।

समभुवि किल राशिर्यः स्थितः स्थूलधान्यः
परिधिपरिमितः स्याद्धस्तषष्ट्यैर्यदीया।
प्रवद गणक खार्यः किं मिताः सन्ति तस्मि-
न्नथ पृथगणुधान्यैः शूकधान्यैश्च शीघ्रम्॥ १॥

हे गणक, समतल भूमि में स्थित स्थूल, सूक्ष्म और शूक धान्य, तीनों के ढेर की परिधि ६० हाथ हैं, तो उनकी खारियों के मान अलग-अलग बताओ।

अथ स्थूलधान्यराशिमानावबोधनाय—

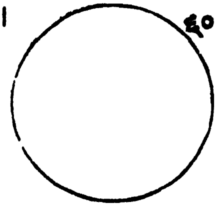
न्यासः।



परिधिः ६०। वेधः ६। परिधेः षष्ठांशः १०। वर्गितः १००। वेध ६ निघ्नः। लब्धाः खार्यः ६००।

अथाणुधान्यराशिमानानयनाय-

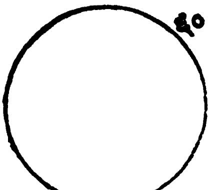
न्यासः ।



परिधिः ६० । वेधः $\frac{६०}{११}$ । जातं फलम् ५४५$\frac{५}{११}$ ।

अथ शूकधान्यराशिमानानयनाय—

न्यासः ।



परिधिः ६० । वेधः $\frac{२०}{३}$ जाताः खार्यः ६६६$\frac{२}{३}$ ।

उदाहरण—यहाँ स्थूल धान की परिधि ६० हाथ है, तो सूत्र के अनुसार इसका दशमांश ६० ÷ १० = ६ हाथ वेध हुआ । अब परिधि ६० के छठे भाग $\frac{६०}{६}$ = १० के वर्ग १०० को वेध ६ से गुणा करने पर १०० × ६ = ६०० घन हाथ हुए । इसी प्रकार सूक्ष्म धान की परिधि ६० के ११ वाँ भाग $\frac{६०}{११}$ हाथ वेध से परिधि के षष्ठांश के वर्ग १०० वर्ग हाथ को गुणा करने पर $\frac{१०० \times ६०}{११}$ = $\frac{६०००}{११}$ = ५४५$\frac{५}{११}$ घन हाथ हुए । एवं शूक-धान की परिधि ६० के ९ वें भाग $\frac{६०}{९}$ हाथ, वेध से परिधि के छठे भाग के वर्ग १०० व· हाथ को गुणा करने पर $\frac{१०० \times ६०}{९}$ = $\frac{२०००}{३}$ = ६६६$\frac{२}{३}$ घन हाथ हुए ।

अथ भित्यन्तर्बाह्यकोणसंलग्नराशिप्रमाणानयने करणसूत्रं वृत्तम् ।

द्विवेदसत्रिभागैकनिघ्नात् तु परिधेः फलम् ।
भित्त्यन्तर्बाह्यकोणस्थराशेः स्वगुणभाजितम् ॥ २ ॥

भित्त्यन्तर्बाह्यकोणस्थराशेः परिधेः द्विवेदसत्रिभागैकनिघ्नात् (यत् फलं तत्) स्वगुणभाजितं तदा फलं भवति ।

घर की दीवार के भीतर तथा भीतर और बाहर के कोणों में लगे हुये

धान के ढेर की परिधि को क्रम से २, ४ और $\frac{४}{३}$ से गुणा कर उन पर से जो फल हों उनको अपने-अपने गुणक से भाग देने पर वास्तव फल होते हैं।

उपपत्तिः—अथ भित्त्यन्तर्बाह्यकोणस्थधान्यराशीनां परिधयः वास्तवपरिधीनां क्रमेणार्धांशचतुर्थांशत्रिगुणितचतुर्थांशसमा भवन्तीति स्पष्टमेवातो भित्त्यादिलग्नपरिधीन् प्रथमं क्रमेण द्विवेदचतुर्गुणितत्र्यंशैः संगुण्य तेभ्यः पूर्वोक्तप्रकारेण यानि फलानि तानि द्विवेदचतुर्गुणितत्र्यंशभक्तान्यभीष्ट फलानि भवन्तीति किं चित्रम्।

उदाहरणम्।

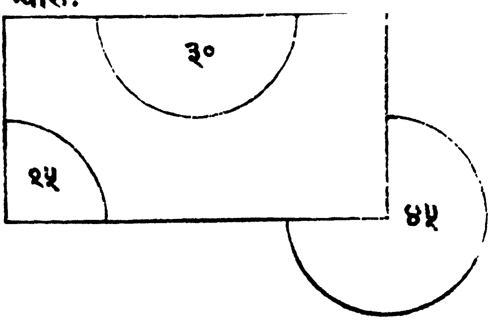
परिधिर्भित्तिलग्नस्य राशेस्त्रिंशत्करः किल।
अन्तःकोणस्थितस्यापि तिथितुल्यकरः सखे॥ १॥
बहिष्कोणस्थितस्यापि पञ्चघ्ननवसम्मितः।
तेषामाचक्ष्व मे क्षिप्रं घनहस्तान् पृथक् पृथक्॥ २॥

हे मित्र, दीवार में लगे हुये धान के ढेर की परिधि ३० हाथ, तथा घर के भीतर और बाहर के कोने में लगे हुये ढेर की परिधि क्रम से १५ और ४५ हाथ हैं, तो उनके घनहस्त अलग-अलग शीघ्र बताओ।

अत्रापि स्थूलादिधान्यानां राशिमानावबोधनाय स्पष्टं क्षेत्रत्रयम् तत्रादावनणुधान्यराशिमानावबोधकं क्षेत्रम्।

न्यासः। अत्राद्यस्य परिधिः (३०) द्विनिघ्नः ६०।

न्यासः

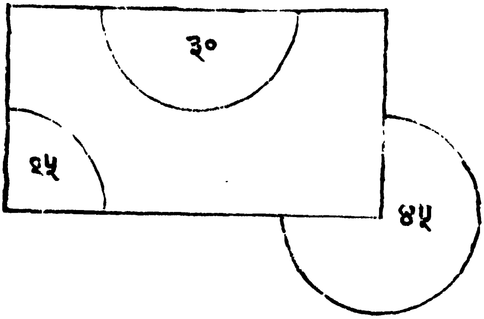


अन्यः १५ चतुर्घ्नः ६०। अपरः ४५। सत्रिभागैक $\frac{४}{३}$ निघ्नः ६०। एषां वेधः ६। एभ्यः फलं तुल्यमेतावत्य एव खार्यः ६००। एतत्स्वस्वगुणेन भक्तं जातं पृथक्पृथक् फलम् ३००। १५०। ४५०।

अथाणुधान्यराशिमानानयनाय—

न्यासः ।

न्यासः

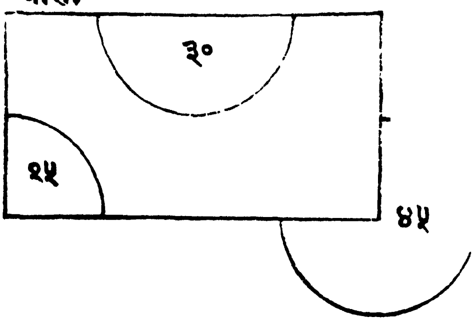


पूर्ववत् क्षेत्रत्रयस्य स्वगुणगुणितपरिधिः ६० । वेधः $\frac{६०}{११}$ । फलानि २७२ $\frac{८}{११}$ । १३६ $\frac{४}{११}$ । ४०९ $\frac{१}{११}$ ।

अथ शूकधान्यराशिमानानयनाय—

न्यासः ।

न्यासः



अत्रापि पूर्ववत् क्षेत्रत्रयस्य स्वगुणगुणितः परिधिः ६० । वेधः $\frac{२०}{३}$ । फलानि ३३३ $\frac{१}{३}$ । १६६ $\frac{२}{३}$ । ५०० ।

इति राशिव्यवहारः समाप्तः ।

उदाहरण—यहाँ पहले स्थूल धान के ढेर का घन-हस्त निकालना है, तो सूत्र के अनुसार दीवार में लगी हुई परिधि ३० को २ से, भीतर के कोने में लगे हुये ढेर की परिधि १५ हाथ को ४ से और बाहर के कोने में लगे हुये ढेर की परिधि ४५ हाथ को $\frac{४}{३}$ से गुणा करने पर क्रम से ३० × २ = ६०, १५ × ४ = ६०, और $\frac{४५ \times ४}{३}$ = ६० हुये । अब स्थूल धान होने के कारण इस

परिधि का दशमांश $= \frac{६०}{१०} = ६$ हाथ वेध हुआ। 'परिधिषष्ठे वर्गिते वेधनिघ्ने' इसके अनुसार परिधि ६० के षष्ठांश १० के वर्ग १०० को वेध ६ से गुणा करने पर $१००० \times ६ = ६००$ खारियाँ हुई। इसको अपने-अपने गुणक अर्थात् २, ४ और $\frac{४}{३}$ से अलग-अलग भाग देने पर दीवार में लगे हुये ढेर की खारी $= \frac{६००}{२} = ३००$। घर के भीतर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी $= \frac{६००}{४}$ $= १५०$ और घर के बाहर कोने में लगे हुये ढेर की खारी $= ६०० \div \frac{४}{३}$ $= \frac{६०० \times ३}{४} = १५० \times ३ = ४५०$। सूक्ष्म धान की परिधि भी उक्तरीति से क्रिया करने पर ६० हाथ ही होती है, किन्तु इसमें परिधि के एकादशांश वेध होने के कारण $\frac{६०}{११}$ वेध हुआ। अब परिधि ६० के षष्ठांश १० के वर्ग १०० को वेध $\frac{६०}{११}$ से गुणा कर $\frac{१०० \times ६०}{११} = \frac{६०००}{११}$ को २ से भाग देने पर दीवार में लगे हुये ढेर की खारी $= \frac{६०००}{११ \times २} = \frac{३०००}{११} = २७२\frac{८}{११}$ हुई। फिर $\frac{६०००}{११}$ को ४ से भाग देने पर भीतर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी $= \frac{६०००}{११ \times ४} = \frac{१५००}{११}$ $= १३६\frac{४}{११}$ हुई और $\frac{६०००}{११}$ को $\frac{४}{३}$ से भाग देने पर बाहर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी $= \frac{६०००}{११} \div \frac{४}{३} = \frac{६००० \times ३}{११ \times ४} = \frac{१५०० \times ३}{११} = \frac{४५००}{११} = ४०९\frac{१}{११}$ हुई। इसी प्रकार उदाहरण में दी गई परिधियों को २, ४ और $\frac{४}{३}$ से गुणा करने पर शूक-धान की परिधि भी ६० हाथ हुई। अब इस परिधि का नवमांश $\frac{६०}{९} = \frac{२०}{३}$ वेध हुआ। परिधि ६० के षष्ठांश १० के वर्ग १०० को, वेध $\frac{२०}{३}$ से गुणा कर $\frac{१०० \times २०}{३} = \frac{२०००}{३}$ को २ से भाग देने पर दीवार में लगे हुये ढेर की खारी $= \frac{२०००}{३ \times २} = \frac{१०००}{३} = ३३३\frac{१}{३}$ हुई। $\frac{२०००}{३}$ को ४ से भाग देने पर $\frac{२०००}{३ \times ४} = \frac{५००}{३} = १६६\frac{२}{३}$ घर के भीतर के कोने में लगे हुये ढेर का फल हुआ। इसी प्रकार $\frac{२०००}{३}$ को $\frac{४}{३}$ से भाग देने पर बाहर के कोने में लगे हुये ढेर की खारी $= \frac{२०००}{३} \times \frac{३}{४} = \frac{२०००}{४} = ५००$ हुई।

इति राशिव्यवहारः समाप्तः।

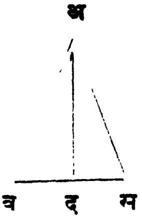
अथ छायाव्यवहारे करणसूत्रं वृत्तम्।

छाययोः कर्णयोरन्तरे ये तयोर्वर्गविश्लेषभक्ता रसाद्रीषवः।
सैकलब्धेः पदघ्नं तु कर्णान्तरं भान्तरेणोनयुक्तं दले स्तः प्रभे॥

छाययोः कर्णयोः अन्तरे ये स्तः तयोः वर्गविश्लेषभक्ता रसाद्रीषवः, सैकलब्धेः पदघ्नं तु कर्णान्तरं भान्तरेण ऊनयुक्तं दले प्रभे स्तः।

दोनों छाया और दोनों कर्णों के अन्तर जो हों, उनके वर्गों के अन्तर से ५७६ में भाग देकर भाग फल में १ जोड़ कर उसके वर्गमूल से कर्णों के अन्तर को गुणा कर फल में अलग-अलग छायान्तर को घटा कर और जोड़ कर आधा करें तो दोनों छाया होती हैं।

उपपत्तिः—कल्प्यते अ द = द्वादशाङ्गुलशङ्कुः। व द = लघुच्छाया, द स = बृहच्छाया, अ व = लघुकर्णः, अ स = बृहत्कर्णः। बृ· कर्ण + ल· कर्ण = क· यो, बृ· क − ल· क = क· अं, बृ· छा + ल· छा = छा· यो, बृ· छा − ल· छा = छा· अं।



$$\text{अथ अ व}^2 - \text{व द}^2 = \text{अ द}^2 = \text{अ स}^2 - \text{द स}^2$$

$$\therefore \text{अ स}^2 - \text{अ व}^2 = \text{द स}^2 - \text{व द}^2,$$

$$\text{वा } (\text{अ स} + \text{अ व})(\text{अ स} - \text{अ व}) = (\text{द स} + \text{व द})(\text{द स} - \text{व द})$$

वा, (बृ· कर्ण + ल· कर्ण) (बृ· कर्ण − ल· कर्ण) = (बृ· छा + ल· छा) (बृ· छा − ल· छा), वा क· यो × क· अं = छा· यो × छा· अं,

$$\therefore \text{क·यो} = \frac{\text{छा· यो} \times \text{छा· अं}}{\text{क· अं}}$$ । ततः संक्रमणेन बृ· क

$$= \frac{\text{छा· यो} \times \text{छा· अं} + \text{क· अं}^2}{२\,\text{क· अं}}, \text{ तथा बृ· छा} = \frac{\text{छा· यो} + \text{छा· अं}}{२}।$$

$$\text{अथ बृ· क}^2 - \text{बृ· छा}^2 = १२^2,$$

$$= \left(\frac{\text{छा· यो} \times \text{छा· अं} + \text{क· अं}^2}{२\,\text{क· अं}}\right)^2 - \left(\frac{\text{छा· यो} + \text{छा· अं}}{२}\right)^2$$

$$\text{वा } १४४ = \frac{\text{छा· यो}^2 \times \text{छा· अं}^2 + २\,\text{छा· यो} \times \text{छा· अं} \times \text{क· अं}^2 + \text{क· अं}^4}{४\,\text{क· अं}^2}$$

$$- \frac{\text{छा· यो}^2 + \text{छा· अं}^2 + २\,\text{छा· यो} \times \text{छा· अं}}{४}$$

$$\therefore \frac{\text{छा· यो}^2\,(\text{छा· अं}^2 - \text{क· अं}^2) - \text{क· अं}^2\,(\text{छा· अं}^2 - \text{क· अं}^2)}{४\,\text{क· अं}^2}$$

$$= \frac{(\text{छा· यो}^2 - \text{क· अं}^2)(\text{छा· अं}^2 - \text{क· अं}^2)}{\text{४ क· अं}^2}$$

$$\therefore \text{१४४} \times \text{४ क· अं}^2 = (\text{छा· यो}^2 - \text{क· अं}^2)(\text{छा· अं}^2 - \text{क· अं}^2)$$

$$\text{वा} \quad \frac{\text{५७६ क· अं}^2}{\text{छा·अं}^2 - \text{क· अं}^2} = \text{छा यो}^2 - \text{क· अं}^2$$

$$\therefore \text{छा· यो}^2 = \frac{\text{५७६ क अं}^2}{\text{छा·अं}^2 - \text{क अं}^2} + \text{क· अं}^2 = \text{क· अं}^2 \left(\frac{\text{५७६}}{\text{छा·अं}^2 - \text{क·अं}^2} + \text{१}\right)$$

$$\therefore \text{छा यो} = \text{क· अं}\sqrt{\frac{\text{५७६}}{\text{छा· अं}^2 - \text{क· अं}^2} + \text{१}} = \text{क· अं} \times \text{प द}$$

ततः संक्रमणेन $\text{ल· छा} = \frac{\text{क· अं} \times \text{प द} - \text{छा· अं}}{\text{२}}$, बृ· छा

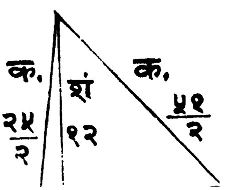
$= \frac{\text{क· अं} \times \text{प द} + \text{छा· अं}}{\text{२}}$ अत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

नन्दचन्द्रैर्मितं छाययोरन्तरं कर्णयोरन्तरं विश्वतुल्यं ययोः ।
ते प्रभे वक्ति यो युक्तिमान् वेत्त्यसौ व्यक्तमव्यक्तयुक्तं हि मन्येऽखिलम् ॥१॥

जिन दो छाया का अन्तर १९ और उनके कर्णों का अन्तर १३ है, उन दोनों छाया को उपपत्ति जानने वाले जो व्यक्ति कहें, उन्हें मैं पाटी और बीजगणित के सभी युक्ति के ज्ञाता समझूँ ।

न्यासः



छायान्तरम् १९ । कर्णान्तरम् १३ । अनयोर्वर्गान्तरेण १९२ भक्ता रसाद्रीषवः ५७६ । लब्धम् ३ । सैकस्यास्य ४ मूलम् २ । अनेन गुणितं कर्णान्तरं २६ द्विष्ठं भान्तरेण १९ ऊनयुतम् ७ । ४५ । तदर्धे लब्धे छाये $\frac{७}{२}$ । $\frac{४५}{२}$ । तत्कृत्योर्योगपदमित्यादिना जातौ कर्णौ । $\frac{२५}{२}$ । $\frac{५२}{२}$ ।

उदाहरण—यहाँ दोनों छाया का अन्तर १९ और दोनों कर्ण का अन्तर १३ है, तो सूत्र के अनुसार छायान्तर १९ के वर्ग ३६१ में कर्णान्तर १३ के वर्ग १६९ को घटा कर शेष (३६१ − १६९) = १९२ से ५७६ में भाग देने

से लब्धि $\frac{५७६}{१९२}$=३ में १ जोड़ कर (३ + १) = ४ के वर्गमूल २ को कर्णान्तर १३ से गुणा करने पर १३ × २ = २६ हुआ। इसमें छायान्तर १९ को घटा तथा जोड़ कर दोनों का आधा करने पर क्रम से लघुच्छाया = $\frac{२६-१९}{२}$ = $\frac{७}{२}$ और बृहच्छाया = $\frac{२६+१९}{२}$ = $\frac{४५}{२}$ हुई। अब ल॰ छाया $\frac{७}{२}$ के वर्ग $\frac{४९}{४}$ में शंकु १२ के वर्ग १४४ को जोड़ कर ($\frac{४९}{४}$ + १४४ = $\frac{४९+५७६}{४}$) = $\frac{६२५}{४}$ का मूल लेने से $\frac{२५}{२}$ लघु कर्ण, और बृ॰ छा $\frac{४५}{२}$ के वर्ग $\frac{२०२५}{४}$ में शंकु वर्ग १४४ को जोड़ कर ($\frac{२०२५}{४}$ + १४४ = $\frac{२०२५+५७६}{४}$) = $\frac{२६०१}{४}$ का मूल लेने पर $\frac{५१}{२}$ बृहत्कर्ण हुआ।

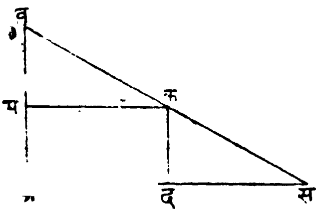
छायान्तरे करणसूत्रं वृत्तार्धम्।

शङ्कुः प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरघ्नश्छाया भवेद्विनरदीपशिखौच्च्यभक्तः।

प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरघ्नः शङ्कुः विनरदीपशिखौच्च्यभक्तः छाया भवेत्।

दीप की जड़ और शङ्कुः की जड़ के बीच की भूमि को शङ्कु से गुणा कर गुणनफल को दीपशिखा की ऊँचाई में शङ्कु को घटा कर शेष से भाग दें तो छाया होती है।

उपपत्तिः—कल्प्यते द क = शङ्कु, अ व = दीपशिखौच्च्यम् अ द = प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरभूमिः = क प, स द = छाया, प व = अ व − अ प = अ व − द क = दीपशिखौच्च्य − शङ्कु। अथ, व प क, क द स त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन − द स = $\frac{प क \times द क}{प व}$, वा छाया



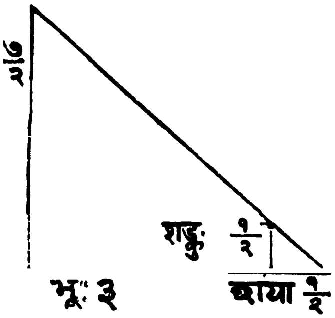
= $\frac{\text{प्रदीपतलशङ्कुतलान्तर} \times \text{शं॰}}{\text{दीपशिखौच्च्य} - \text{शं॰}}$ अत उपपन्नम्।

उदाहरणम्।

शङ्कुप्रदीपान्तरभूस्त्रिहस्ता दीपोच्छ्रितिः सार्धकरत्रया चेत्।
शङ्कोस्तदाऽर्काङ्गुलसम्मितस्य तस्य प्रभा स्यात् कियती वदाशु ॥१॥

यदि शङ्कु और दीप की जड़ के बीच की भूमि ३ हाथ और दीप की ऊँचाई के तीन हाथ है, तो १२ अङ्गुल के शङ्कु की छाया का मान शीघ्र बताओ।

न्यासः ।



शङ्कुः $\frac{१}{२}$ । प्रदीपशङ्कुतलान्तरम् ३ अनयोर्घातः $\frac{३}{२}$ । विनरदीपशिखौच्च्येन ३ भक्तो लब्धानि छायाङ्गुलानि १२ ।

उदाहरण—यहाँ शङ्कु १२ अंगुल, अर्थात् ($\frac{१२}{२४}$ हाथ =) $\frac{१}{२}$ हाथ है, तो सूत्र के अनुसार शङ्कु $\frac{१}{२}$ हाथ को, दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि ३ हाथ से गुणा कर ($\frac{१}{२} \times \frac{३}{१} =$) $\frac{३}{२}$ को, दीपशिखा की उँचाई ($३\frac{१}{२}$ हाथ=) $\frac{७}{२}$ हाथ में, शङ्कु $\frac{१}{२}$ हाथ को घटा कर शेष ($\frac{७}{२} - \frac{१}{२} = \frac{६}{२} =$) ३ हाथ से भाग देने पर ($\frac{३}{२ \times ३}$) $\frac{१}{२}$ हाथ = १२ अंगुल छाया हुई ।

अथ दीपोच्छ्रित्यानयनाय करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

छायाहृते तु नरदीपतलान्तरघ्ने शङ्कौ भवेन्नरयुते खलु दीपकौच्च्यम् । २ ॥

नरदीपतलान्तरघ्ने शङ्कौ छायाहृते तु नरयुते सति खलु दीपकौच्च्यं भवति ।

शङ्कु को दीपतल और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि से गुणा करें और छाया से भाग दें; लब्धि में शङ्कु को जोड़ने पर दीप की उँचाई होती है ।

उपपत्तिः—शङ्कु प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरनरच्छायत्यादिसूत्रोपपत्तौ व प क, क द स त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन व प = $\frac{\text{द क} \times \text{प क}}{\text{द स}}$ वा अ व − अ प

= $\frac{\text{द क} \times \text{अ व}}{\text{द स}}$, वा दीपौच्च्यम् − शङ्कु = $\frac{\text{शङ्कु} \times \text{नरदीपतलान्तर}}{\text{छाया}}$

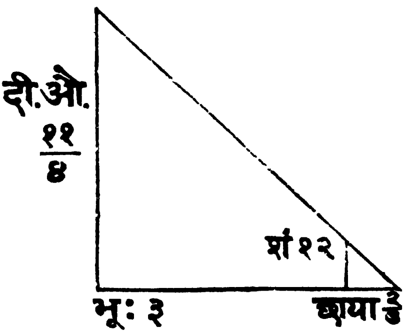
∴ दीपौच्च्यम् = $\frac{\text{शङ्कु} \times \text{नरदीपतलान्तर}}{\text{छाया}}$ + शङ्कु अत उपपन्नम् ।

उदा . रणम् ।

प्रदीपशङ्क्वन्तरभूस्त्रिहस्ता छायाऽङ्गुलैः षोडशभिः समा चेत् ।
दीपोच्छ्रितिः स्यात् कियती वदाशु प्रदीपशङ्क्वन्तरमुच्यतां मे ॥१॥

यदि दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि ३ हाथ और छाया १६ अंगुल है, तो दीप की उँचाई बताओ। एवं दीप की उँचाई जान कर उसी छाया और शङ्कु पर से दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि का मान बताओ।

न्यासः ।



शङ्कुः १२ । छायाङ्गुलानि १६ । शङ्कुप्रदीपान्तरहस्ताः ३ । लब्धं दीपकौच्च्यं हस्ताः $\frac{११}{४}$ ।

उदाहरण—यहाँ सूत्र के अनुसार शङ्कु १२ अंगुल अर्थात् $\frac{१}{२}$ हाथ को दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि ३ हाथ से गुणा कर $\frac{१}{२} \times \frac{३}{१} = \frac{३}{२}$ को, छाया (१६ अंगुल $= \frac{१६}{२४}$ हाथ $=$) $\frac{२}{३}$ हाथ से भाग देने पर लब्धि ($\frac{३}{२} \div \frac{२}{३} = \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} =$) $\frac{९}{४}$ हाथ में शङ्कु $\frac{१}{२}$ हाथ जोड़ने पर ($\frac{९}{४} + \frac{१}{२} =$) $\frac{११}{४}$ हाथ दीप की उँचाई हुई। दूसरे प्रश्न का उत्तर आगे है।

प्रदीपशङ्क्वन्तरभूमानानयनाय करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

विशङ्कुदीपोच्छ्रयसंगुणा भा शङ्कूद्धृता दीपनरान्तरं स्यात् ।

भा विशङ्कुदीपोच्छ्रयसंगुणा, शङ्कूद्धृता दीपनरान्तरं स्यात् ।

दीप की उँचाई में शङ्कु को घटा कर जो हो, उससे छाया को गुणा कर गुणनफल में शङ्कु से भाग दें, तो दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि होती है।

उपपत्तिः—शङ्कुः प्रदीपतलशङ्कुतलान्तरघ्नश्छायेत्यादिसूत्रस्योपपत्तौ व प क, क द स त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन — $\text{प क} = \frac{\text{द स} \times \text{व प}}{\text{क द}}$, वा, $\text{अ द} = \frac{\text{द स} \times (\text{अ व} - \text{अ प})}{\text{क द}} = \frac{\text{द स} (\text{अ व} - \text{क द})}{\text{क द}}$ वा, $\text{दीपनरान्तर} = \frac{\text{छाया} \times (\text{दीपोच्छ्रिति} - \text{शङ्कु})}{\text{शङ्कु}}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

पूर्वोक्त एव दिपोच्छ्रायः $\frac{११}{४}$ । शङ्क्वङ्गुलानि १२ । छाया १६ । लब्धाः शंकुप्रदीपान्तरहस्ताः ३ ।

उदाहरण—यहाँ पूर्वोक्त दीप की उँचाई $\frac{११}{४}$ हाथ, शङ्कु १२ अंगुल अर्थात् $\frac{१}{२}$ हाथ और छाया १६ अंगुल अर्थात् $\frac{२}{३}$ हाथ हैं, तो सूत्र के अनुसार दीप की उँचाई $\frac{११}{४}$ हाथ में शङ्कु $\frac{१}{२}$ हाथ को घटा कर शेष $(\frac{११}{४} - \frac{१}{२} =) = \frac{९}{४}$ हाथ से, छाया $\frac{२}{३}$ हाथ को गुणा कर $\frac{२}{३} \times \frac{९}{४} = \frac{३}{२}$ व· हाथ को, शङ्कु $\frac{१}{२}$ हाथ से भाग देने पर $\frac{३}{२} \div \frac{१}{२} = \frac{३}{२} \times \frac{२}{१}$ हाथ $= ३$ हाथ, दीप और शङ्कु की जड़ के बीच की भूमि का मान हुआ ।

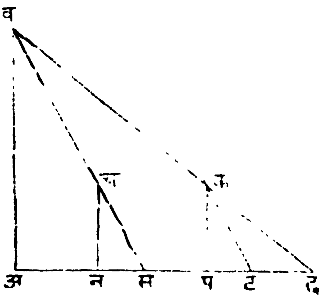
छायाप्रदीपान्तरदीपौच्च्यानयनाय करणसूत्रं सार्धवृत्तम् ।

छायाग्रयोरन्तरसंगुणाभा छायाप्रमाणान्तरहृद्भवेद्भूः ॥ ३ ॥
भूशंकुघातः प्रभया विभक्तः प्रजायते दीपशिखौच्च्यमेवम् ।
त्रैराशिकेनैव यदेतदुक्तं व्याप्तं स्वभेदैर्हरिणेव विश्वम् ॥ ४ ॥

छायाग्रयोः अन्तरसंगुणा भा छायाप्रमाणान्तरहृत् भूः भवेत् । एवं भूशङ्कु-घातः प्रभया विभक्तः दीपशिखौच्च्यं प्रजायते । एतत् यत् उक्तं तत् हरिणा स्वभेदैः विश्वं इव त्रैराशिकेनैव व्याप्तम् ।

दोनों छाया के अग्र के बीच की भूमि से छाया को गुणा कर गुणनफल में दोनों छाया के अन्तर से भाग दें तो भूमि होती है । भूमि और शङ्कु के गुणन-फल को छाया से भाग देने पर दीप-शिखा की उँचाई होती है । जिस प्रकार भगवान् विष्णु के भेद से यह संसार व्याप्त है, उसी प्रकार ये सभी गणित त्रैराशिक के भेद से व्याप्त हैं ।

उपपत्तिः—कल्प्यते, अ व = दीपोच्छ्रितिः । च न = शङ्कुः = क प । न स = प्र· छा, प द = द्वि· छा । स द = छायाग्रान्तरम् । अथ क बिन्दोः व स समानान्तरा कट रेखा विधेया, तदा न च स, प क ट त्रिभुजयोस्तुल्यत्वात् न स = प ट = प्र· छा, अतः ट द = प द − प ट = द्वि· छा − प्र· छा । अथ द व स त्रिभुजे व स आधारस्य समानान्तरा क ट रेखा तेन षष्ठाध्यायेन



$\frac{\text{द ट}}{\text{ट स}} = \frac{\text{द क}}{\text{क व}}$ । परञ्च, द व अ त्रिभुजे व अ आधारस्य सामानान्तरा क प रेखा तेन

$\frac{\text{द क}}{\text{क व}} = \frac{\text{द प}}{\text{प अ}}$ । $\therefore \frac{\text{द ट}}{\text{ट स}} = \frac{\text{द प}}{\text{प अ}}$ ।

$\therefore \frac{\text{ट स}}{\text{द ट}} = \frac{\text{प अ}}{\text{द प}}$ $\therefore 1+\frac{\text{ट स}}{\text{द ट}} = 1+\frac{\text{प अ}}{\text{द प}}$ ।

$\therefore \frac{\text{द ट} + \text{ट स}}{\text{द ट}} = \frac{\text{द प} + \text{प अ}}{\text{द प}}$ ।

वा $\frac{\text{स द}}{\text{ट द}} = \frac{\text{अ द}}{\text{प द}}$ । $\therefore$ अ द $= \frac{\text{स द} \times \text{प द}}{\text{ट द}}$ । वा द्वि· भूमिः

$= \frac{\text{छायाग्रान्तर} \times \text{द्वि· छा}}{\text{द्वि· छा} - \text{प्र· छा}}$ । एवमेव प्रथमभूमिः = अ स $= \frac{\text{छायाग्रान्तर} \times \text{प्र· छा}}{\text{द्वि· छा} - \text{प्र· छा}}$ ।

ततः व अ द, क प द त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन − अ व $= \frac{\text{प क} \times \text{अ द}}{\text{प द}}$

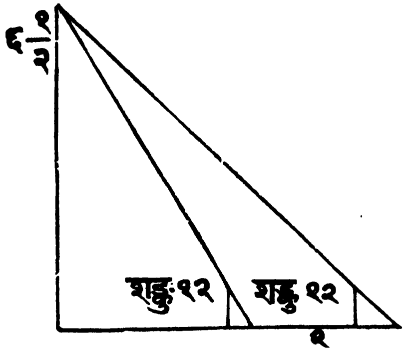
$\frac{\text{शङ्कु} \times \text{द्वि भूमि}}{\text{द्वि· छा}}$ = दीपशिखौच्च्यम् । एवमेव व अ स, च न स त्रिभुजयोः साजात्यादनुपातेन − अ व = दीपौच्च्यम् $= \frac{\text{न च} \times \text{अ स}}{\text{न स}} = \frac{\text{शङ्कु} \times \text{प्र· भूमि}}{\text{प्र· छा}}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

शङ्कोर्भाऽर्कमिताङ्गुलस्य सुमते ! दृष्टा किलाष्टाङ्गुला
छायाग्राभिमुखे करद्वयमिते न्यस्तस्य देशे पुनः ।
तस्यैवार्कमिताङ्गुला यदि तदा छायाप्रदीपान्तरं
दीपौच्च्यं च कियद्वद व्यवहृतिं छायाभिधां वेत्सि चेत् ॥ १ ॥

हे सुमते, १२ अंगुल के शङ्कु की छाया ८ अंगुल पाई गई, फिर उसी शङ्कु को छाया के अग्र की ओर २ हाथ आगे करके रखने से दूसरी छाया १६ अंगुल हुई, तो यदि तुम छायाव्यवहार जानते हो, तो छाया के अग्र और दीप-तल के बीच की भूमि तथा दीप की उँचाई बताओ।

न्यासः।



अत्र छायाग्रयोरन्तरमङ्गुलात्मकम् ४८। छाये च ८। १२। अनयोराद्या ८। इयमनेन ४८ गुणिता ४१६। छायाप्रमाणान्तरेण ४ भक्ता लब्धं भूमानम् १०४। इदं प्रथमच्छायाप्रदीपतलयोरन्तरमित्यर्थः। एवं द्वितीयच्छायाग्रान्तरभूमानम् १५६। भूशंकुघातः प्रभया विभक्त इति जातमुभयतोऽपि दीपौच्च्यं सममेव हस्ताः ६½

भूः १३/३। छा १/३। भूः १३/२। छा १/२

एवमित्यत्र छायाव्यवहारे त्रैराशिककल्पनयाऽऽनयनं वर्तते। तद्यथा। प्रथमच्छायातो ८ द्वितीयच्छाया १२ यावताऽधिका तावता छायावयवेन यदि छायाग्रान्तरतुल्या भूर्लभ्यते तदा छायया किमिति. एवं पृथक्-पृथक् छायाप्रदीपतलान्तरप्रमाणंलभ्यते। ततो द्वितीयं त्रैराशिकम् यदि छायातुल्ये भुजे शंकुः कोटिस्तदा भूतुल्ये भुजे किमिति लब्धं दीपकौच्च्यमुभयतोऽपि तुल्यमेव। एवं पञ्चराशिकादिकमखिलं त्रैराशिकः कल्पनयैव सिद्धम्। यथा भगवता श्रीनारायणेन जननमरणक्लेशापहारिणा निखिलजगज्जननैकबीजेन सकलभुवनभावनगिरिसरित्सुरनरसासुरादिभिः स्वभेदैरिदं जगद्व्याप्तं तथेदमखिलं गणितजातं त्रैराशिकेन व्याप्तम्।

उदाहरण—यहाँ प्रथम शङ्कु की जड़ से द्वितीय शङ्कु की जड़ तक २ हाथ अर्थात् ४८ अंगुल हैं। इसमें प्रथम छाया का मान ८ अंगुल घटाने से प्रथम छायाग्र से द्वितीय शङ्कु के मूल पर्यन्त भूमिका मान (४८ − ८ =) ४० अंगुल हुआ। इसमें द्वितीय छाया १२ अंगुल जोड़ने से दोनों छाया के अग्रों का अन्तर ४० + १२ = ५२ अंगुल हुआ। अ व सूत्र के अनुसार प्रथम छाया ८ अंगुल को छायाग्रान्तर ५२ अंगुल से गुणा कर ८ × ५२ = ४१६ व· अंगुल को दोनों छाया के अन्तर (१२ − ८ =) ४ अंगुल से भाग देने पर $\frac{४१६}{४}$ = १०४ अंगुल प्रथम भू-मान हुआ। इसको शङ्कु १२ अंगुल से गुणा कर प्रथम छाया से भाग देने पर $\frac{१०४ \times १२}{८}$ = १३ × १२ = १५६ अंगुल दीप की उँचाई हुई। इसी प्रकार छायाग्रान्तर ५२ से द्वितीय छाया १२ अंगुल को गुणा कर दोनों छाया के अन्तर ४ अंगुल से भाग देने पर $\frac{१२ \times ५२}{४}$ = १५६ अंगुल द्वितीय भूमि हुई। इसको शङ्कु १२ अंगुल से गुणा कर द्वितीय छाया से भाग देने पर $\frac{१५६ \times १२}{१२}$ = १५६ अंगुल = ६$\frac{१}{२}$ हाथ दीप की उँचाई हुई। इस तरह प्रथम छाया का हस्तात्मक मान = $\frac{८}{२४}$ = $\frac{१}{३}$ प्रथम भूमि १०४ अंगुल = $\frac{१०४}{२४}$ = ४$\frac{१}{३}$ हाथ। द्वितीय छाया १२ अंगुल = $\frac{१२}{२४}$ हाथ = $\frac{१}{२}$ हाथ। द्वितीय भूमि = $\frac{१५६}{२४}$ हाथ = ६$\frac{१}{२}$ हाथ, और दीप की उँचाई = ६$\frac{१}{२}$ हाथ।

यद्येवं तद्बहुभिः किमित्याशङ्क्याह—

यत्किञ्चिद्गुणभागहारविधिना बीजेऽत्र वा गण्यते
तत् त्रैराशिकमेव निर्मलधियामेवावगम्यं विदाम्।
एतद्यद्बहुधाऽस्मदादिजडधीधीवृद्धि बुद्ध्या बुधै-
स्तद्भेदान् सुगमान् विधाय रचितं प्राज्ञैः प्रकीर्णादिकम्॥

बीजगणित अथवा लीलावती में गुणन और भागहार की विधि से जो कुछ कहे गये हैं वे सभी स्वच्छ (तीव्र) बुद्धि वालों के लिये त्रैराशिक ही समझना चाहिये। उसी त्रैराशिक के भेदों को सरल बना कर हम जैसे मन्द बुद्धियों के लिये पूर्वाचार्यों ने प्रकीर्ण आदि गणितों की रचना की है।

इति श्रीभास्कराचार्यविरचितायां लीलावत्यां छायाधिकारः समाप्तः।

अथ कुट्टके करणसूत्रं वृत्तपञ्चकम् ।

भाज्यो हारः क्षेपकश्चापवर्त्यः केनाप्यादौ सम्भवे कुट्टकार्थम् ।
येन च्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेन क्षेपश्चैतद् दुष्टमुद्दिष्टमेव ॥१॥
परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः शेषस्तयोः स्यादपवर्त्तनं सः ।
तेनापवर्त्तेन विभाजितौ यौ तौ भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः ॥२॥
मिथो भजेत् तौ दृढभाज्यहारौ यावद्विभाज्ये भवतीह रूपम् ।
फलान्यधोऽधस्तदधो निवेश्यः क्षेपस्ततः शून्यमुपान्तिमेन ॥३॥
स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यं त्यजेन्मुहुः स्यादिति राशियुग्मम् ।
ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः फलं गुणः स्यादधरो हरेण ॥४॥
एवं तदैवात्र यदा समास्ताः स्युर्लब्धयश्चेद्विषमास्तदानीम् ।
यदागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ स्वतक्षणाच्छेषमितौ तु तौ स्तः ॥५॥

सम्भवे सति कुट्टकार्थं केन अपि अङ्केन आदौ भाज्यः हारः क्षेपकश्च अपवर्त्यः । येन भाज्यहारौ छिन्नौ तेन क्षेपश्च न छिन्नः तदा एतत् उद्दिष्टं दुष्टं एव । परस्परं भाजितयोः ययोः संख्ययोः यः शेषः सः तयोः अपवर्तनं स्यात् । तेन अपवर्त्तेन विभाजितौ यौ भाज्यहारौ तौ दृढसंज्ञकौ स्तः । तौ दृढभाज्यहारौ मिथः तावत् भजेत् यावत् विभाज्ये इह रूपं भवति । फलानि अधः अधः (निवेश्यानि) तदधः क्षेपः निवेश्यः ततः शून्यं (निवेश्यम्) । उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते अन्त्येन युते तत् अन्त्यं त्यजेत् इति मुहुः (क्रिया कार्या तदा) राशियुग्मं स्यात् । ऊर्ध्वः दृढेन विभाज्येन तष्टः फलं स्यात् । अधरः हरेण तष्टः गुणः स्यात् । एवं तदा एव यदा अत्र लब्धयः समाः स्युः । ताः चेत् विषमाः तदानीं लब्धिगुणौ यदा गतौ स्वतक्षणात् विशोध्यौ शेषमितौ तौ स्तः ।

यदि अपवर्त्तन की सम्भावना हो, तो कुट्टक के लिये किसी अङ्क (संख्या) से भाज्य, हर और क्षेप तीनों को पहले अपवर्त्तन देना चाहिये । जिस संख्या से भाज्य एवं हर में अपवर्त्तन लगे और उससे क्षेप में अपवर्त्तन (निःशेष भाग) न लगे, तो उस उदाहरण को ही अशुद्ध समझें । जिन दो संख्याओं में

आपस में भाग देने पर अन्त में जो शेष रहे वही उन दोनों संख्याओं का महत्तम समापवर्त्तक होता है। उस महत्तम समापवर्त्तक से भाज्य और हार में भाग देने पर वे दृढ होते हैं, अर्थात् उनमें फिर किसी अङ्क निश्शेष का भाग नहीं लगता है। उन दृढ भाज्य और हर में आपस में तब तक भाग देना चाहिये जब तक भाज्य में 1 अङ्क बचे। लब्धियों को क्रम से नीचे-नीचे रख कर उनके नीचे क्षेप को और सबसे नीचे शून्य को रक्खें। उपान्तिम अङ्क को अपने ऊपर वाले अङ्क से गुणाकर उसमें अन्तिम अङ्क को जोड़ें और उस अन्तिम अङ्क को त्याग दें। इसी तरह फिर उपान्तिम को अन्त्य और उसके ऊपर के अङ्क को उपान्त्य मान कर उक्तरीति से क्रिया तब तक करनी चाहिये जब तक पङ्क्ति में दो राशि बच जाँय। उनमें ऊपर वाली संख्या में दृढ भाज्य से और नीचे वाली संख्या में दृढ हर से भाग देने पर जो शेष बचें वे क्रम से लब्धि और गुणक होते हैं। लेकिन इस प्रकार से लब्धि और गुणक तभी ठीक होते हैं, यदि भाज्य और हर में परस्पर भाग देने पर लब्धि की संख्या सम हो। यदि उसकी संख्या विषम हो, तो उक्त रीति से आये हुये लब्धि और गुणक को अपने-अपने तक्षण अर्थात् भाज्य और हर में घटाने से वास्तव लब्धि और गुणक होते हैं।

उपपत्तिः—यदि भाज्यः = भा, हारः = ह, क्षेपकः = क्षे, लब्धिः = ल, तथा गुणकः = गु, तदालापोक्त्या – $\text{ल} = \dfrac{\text{भा} \times \text{गु} + \text{क्षे}}{\text{ह}}$,

$\therefore$ ह × ल = भा × गु + क्षे। अत्र यदि 'इ' अनेन भक्तो हरः शुद्ध्यति तदा प्रथमपक्षस्य निरवयवत्वात्तत्तुल्यस्य द्वितीयपक्षस्यापि 'इ' अनेन भक्तस्य निरवयवत्वं स्यात्। तत्र यदि 'इ' अनेन भक्तो-भाज्यो निश्शेषो भवति तदा क्षेपोऽपि 'इ' अनेन निःशेषो भवत्येवान्यथा निरवयवस्य सावयवेन सह समत्वापत्तिः स्यात्तेन येनच्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेनेत्याद्युपपन्नम्। अथ अ, व अनयोर्महत्तमापवर्त्तनानयनाय कल्प्यते $\dfrac{\text{अ}}{\text{व}} = \text{स} + \dfrac{\text{द}}{\text{व}}$, तदा

$$\text{अ} = \text{स} \times \text{व} + \text{द} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{एवं } \dfrac{\text{व}}{\text{द}} = \text{च} + \dfrac{\text{प}}{\text{द}}, \text{ तदा } \text{व} = \text{च} \times \text{द} + \text{प} \cdots\cdots (2)$$

पुनर्यदि $\frac{द}{प}$ = ल + ०, तदा द = ल × प .... (३)

अत्र 'प' अनेन 'द' निश्शेषं भवति तेन (१) (२) स्वरूपयोरपि 'प' अनेन निश्शेषभजनात् 'अ' 'व' अनयोः 'प' अपवर्त्तनाङ्क, स च (२) स्वरूपावलोकनेन महत्तम इति स्फुटं तेन 'परस्परं भाजितयोर्ययोरित्युपपन्नम् ।' तत्रैव (२) स्वरूपावलोकनेन स्फुटं ज्ञायते यत् अ व अनयोः 'प' ततोऽधिकं महदपवर्त्तनं न स्यादत एव महत्तमापवर्त्तनाङ्केन भक्तौ भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः इति समीचीनम् । दृढहरभाज्ययोर्मिथो भजनादन्ते रूपतुल्यमेव शेषं स्यादन्यथा पुनरपवर्त्तनप्रसंगः संभवत्यतो यावद्विभाज्ये भवतीह रूपमिति युक्तियुक्तम् ।

अथ गुणलब्ध्योरानयने विचारः—

भाज्यः = १७३, हारः = ७१, क्षेपः = क्षे, तत्र गुणकः = य, लब्धिः = क, तदा कुट्टकोक्त्या लब्धिः = क = $\frac{य \times १७३ + क्षे}{७१}$

$= \frac{य \times १४२ + य \times ३१ + क्षे}{७१} = २\ य + \frac{३१\ य + क्षे}{७१} = २\ य + नी,$

$\therefore नी = \frac{३१\ य + क्षे}{७१},\ \therefore य = \frac{७१\ नी - क्षे}{३१} = २\ नी + \frac{९\ नी - क्षे}{३१}$

$= २\ नी + पी,\ \therefore पी = \frac{९\ नी - क्षे}{३१},\ \therefore नी = \frac{३१\ पी + क्षे}{९}$

$= ३\ पी + \frac{४\ पी + क्षे}{९} = ३\ पी + लो,\ \therefore लो = \frac{४\ पी + क्षे}{९}$

$\therefore पी = \frac{९\ लो - क्षे}{४} = २\ लो + \frac{लो - क्षे}{४} = २\ लो + ह,$

$\therefore ह = \frac{लो - क्षे}{४},\ \therefore लो = \frac{४\ ह + क्षे}{१} = ४\ ह + क्षे$

इदमभिन्नं लोहितकमानम् । अत्र विलोमकोत्थापनेन या, का माने आगमिष्यतः । आचार्येणाङ्कलाघवार्थं हरितकमानं शून्यं कल्पितमतो लो = क्षे,

$\therefore$ पी = २ क्षे + ततः नी = २ (२ क्षे + ०) + क्षे, ततः

य = २ { ३ (२ क्षे + ०) + क्षे } + २ क्षे + ०,

एवं विलोमकोत्थापनात्

क = २ [{ (२ क्षे + ०) + क्षे } + २ क्षे + ०] + ३ (२ क्षे + ०) + क्षे,
अत्र भाज्यहारयोर्मिथो भजनेनागता लब्धयः क्रमेणोत्तरोत्तरमधोऽधः स्थाप्यास्तदधः क्षेपोऽन्ते खं निवेश्यं ततः स्वोर्ध्वोहतेऽन्त्येन युते तदन्त्यमित्यादिरीत्या राशियुग्मं गुणलब्ध्योर्यावत्तावत्कालकयोर्माने भवतः। एतेनोपपन्नं राशियुग्ममित्यन्तं सूत्रम्।

अत्र यदि $ल = \frac{गु \cdot भा \pm क्षे}{हा}$, $\therefore$ $हा \times ल = गु \cdot भा \pm क्षे$,

अत्र $\frac{गु}{हा} = इ + \frac{गु\ शे}{हा}$, $\therefore$ $गु\ शे = गु - हा \times इ$,

अथ $गु \cdot भा \pm क्षे = हा \times ल$, पक्षौ '$इ \cdot हा \cdot भा \cdot$' अनेन विशोधितौ तदा $गु \cdot भा \pm क्षे - इ \cdot हा \cdot भा \cdot = हा \times ल - इ \cdot हा \cdot भा \cdot$,

$भा\ (गु - इ \cdot हा) \pm क्षे = हा\ (ल - इ \cdot भा \cdot)$ अत्र यदि '$गु - इ \cdot हा$' अयं गुणः स्यात्तदा '$ल - इ \cdot भा \cdot$' अयं लब्धिसमो भवेत्तत्र $गु - इ \cdot हा$ = गुणशेषः।

$ल - इ \cdot भा \cdot$ = लब्धि शेषः, $\frac{ल}{भा} = इ + \frac{ल\ शे}{भा}$

$\therefore$ $ल = भा \cdot इ + ल \cdot शे$, $\therefore$ $ल - भा \cdot इ = ल\ शे$, अत्र गुण शेषे लब्धिशेषे च 'इ' प्रमितलब्ध्योर्मानं तुल्यमेवेत्युपपन्नं सर्वम्।

उदाहरणम्।

एकविंशतियुतं शतद्वयं यद्गुणं गणक पञ्चषष्टियुक्।
पञ्चवर्जितशतद्वयोद्धृतं शुद्धिमेति गुणकं वदाशु तम्॥ ५॥

हे गणक, वह गुणक बताओ, जिससे २२१ को गुणा कर, गुणनफल में ६५ जोड़ कर १९५ से भाग देने पर निश्शेष हो जाता है।

न्यासः। भाज्यः २२१। हारः १९५। क्षेपः ६५।

अत्र परस्परं भाजितयोर्भाज्य २२१ भाजकयोः १९५ शेषं १३। अनेन भाज्यहारक्षेपा अपवर्त्तिता जातो भाज्यः १७। हारः १५। क्षेपः ५। अनयोर्दृढभाज्यहारयोः परस्परं भक्तयोर्लब्धान्यधोऽधस्तदधः क्षे-

पस्तदधः शून्यं निवेश्यमिति जाता वल्ली $\begin{matrix}\text{१}\\ \text{७}\\ \text{५}\\ \text{०}\end{matrix}$। उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते इत्यादि करणेन जातं राशिद्वयम् $\begin{matrix}\text{४०}\\ \text{३५}\end{matrix}$ एतौ दृढभाज्यहाराभ्यां $\begin{matrix}\text{१७}\\ \text{१५}\end{matrix}$ तष्टौ जातौ लब्धिगुणौ ६।५ इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते इति वक्ष्यमाणविधिनै-ताविष्टगुणितस्वतक्षणयुक्तौ वा लब्धिगुणौ २३। २०। द्विकेनेष्टेन वा ४०।३५। इत्यादि।

उदाहरण--भाज्य २२१, हार १९५ और क्षेप ६५ है, तो भाज्य और हार का महत्तमापवर्त्तन निकालने पर १३ हुआ। इससे भाज्य २२१, हार १९५ और क्षेप ६५ को अपवर्त्तन देने से दृढ भाज्य १७, दृढ हार १५ और क्षेप ५ हुये। अब दृढ भाज्य और हर को परस्पर भाग देने से प्रथम लब्धि १, शेष २ से १५ को भाग देने पर द्वितीय लब्धि ७, शेष १ हुआ, अतः आगे की क्रिया सूत्र के अनुसार नहीं की गयी। प्रथम लब्धि १ के नीचे द्वितीय लब्धि ७ को रख कर उसके नीचे क्षेप ५ को और क्षेप के नीचे शून्य लिखने से वल्ली हुई, जो मूल में लिखी है। अब उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते इस सूत्र के अनुसार वल्ली के उपान्तिम अङ्क ५ से उसके ऊपर वाले अङ्क ७ को गुणाकर उसमें अन्तिम अङ्क शून्य को जोड़ने से ३५ हुआ। फिर ३५ से अपने ऊपर वाले अङ्क १ को गुणा कर उसमें अन्तिम अङ्क ३५ के नीचे के ५ को जोड़ने से ४० हुआ। इस तरह वल्ली पर से दो राशियाँ ४०, ३५ हुई। इन दोनों को दृढ भाज्य १७ और हर १५ से भाग देने पर क्रम से शेष ६ लब्धि और ५ गुणक हुये। अब इष्ट १ से दृढ भाज्य १७ और दृढ हर १५ को गुणा कर गुणनफलों में क्रम से आये हुये लब्धि ६ और गुणक ५ को जोड़ने से दूसरी लब्धि २३ और गुणक २० हुये। इसी तरह २ इष्ट पर से लब्धि ४० और गुणक ३५ होते हैं।

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं वृत्तम्।

भवति कुट्टविधेर्युतिभाज्ययोः समपवर्त्तितयोरपि वा गुणः।
भवति यो युतिभाजकयोः पुनः स च भवेदपवर्त्तनसंगुणः॥ ६॥

समपवर्त्तितयोः अपि युतिभाज्ययोः कुट्टविधेः गुणः भवति। तत्र अपवर्त्तनेन

गुणिता लब्धिः वास्तवा स्यात् । पुनः समपवर्तितयोः युतिभाजकयोः यः गुणः भवति स च अपवर्त्तनसंगुणः वास्तवः स्यात् ।

किसी संख्या से क्षेप और भाज्य को अपवर्त्तन देकर पहले की रीति से लब्धि और गुणक लाना चाहिये। यहाँ गुणक वास्तव होता है, किन्तु लब्धि को अपवर्त्तनाङ्क से गुणा करने पर वास्तव लब्धि होती है। इसी तरह क्षेप और भाजक को समान अङ्क से अपवर्त्तन देकर उक्तरीति से जो गुणक हो उसे अपवर्त्तनाङ्क से गुणा करने पर वास्तव गुणक होता है और लब्धि वही वास्तव लब्धि होती है।

उपपत्तिः—अत्र कुट्टकोक्त्या ग·भा ± क्षे = हा·ल, पक्षौ 'अ' अनेन विभक्तौ

तदा $\frac{\text{गु}\cdot\text{भा} \pm \text{क्षे}}{\text{अ}} = \frac{\text{हा}\cdot\text{ल}}{\text{अ}}$

$$\text{वा गु}\,\frac{\text{भा}}{\text{अ}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{अ}} = \text{हा}\cdot\frac{\text{ल}}{\text{अ}}$$

$$\text{वा गु} \times \text{भा}' \pm \text{क्षे} = \text{हा} \times \text{ल}',\ \therefore \text{ल}' = \frac{\text{गु} \times \text{भा}' \pm \text{क्षे}}{\text{हा}} = \frac{\text{ल}}{\text{अ}}$$

अत्र स्पष्टमवलोक्यते यत् 'गु' गुणो वास्तवः किन्तु लब्धिस्तु $\frac{\text{ल}}{\text{अ}}$ इयं न वास्तवातः अपवर्त्तनेन गुणिता वास्तवा भविष्यति। यद्यत्र क्षेप भाजकयोरपवर्त्तनाङ्कः=अ, तदा $\frac{\text{गु} \times \text{भा} \pm \text{क्षे}}{\text{अ}} = \frac{\text{हा} \times \text{ल}}{\text{अ}}$ ।

$$\text{वा}\ \frac{\text{गु}}{\text{अ}} \times \text{भा} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{अ}} = \frac{\text{हा}}{\text{अ}} \times \text{ल},$$

$$\text{वा}\ \frac{\text{गु}}{\text{अ}} \times \text{भा} \pm \text{क्षे}' = \text{हा} \times \text{ल},\ \therefore \text{ल} = \frac{\frac{\text{गु}}{\text{अ}}\text{भा} \pm \text{क्षे}'}{\text{हा}'}$$

अत्र लब्धिस्तु वास्तवा 'ल' किन्तु गुणः $\frac{\text{'गु'}}{\text{अ}}$ अयं अपवर्त्तनाङ्केन 'अ' अनेन गुण्यते तदा वास्तवः 'गु' गुण को भविष्यतीत्युपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

शतं हतं येन युतं नवत्या विवर्जितं वा विहृतं त्रिषष्ट्या ।
निरग्रकं स्याद्वद मे गुणं तं स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि ॥ १ ॥

वह गुणक बताओ जिससे १०० को गुणा कर उस गुणनफल में ९० जोड़ कर या घटा कर ६३ से भाग देने पर निश्शेष हो जाता है ।

न्यासः भाज्यः १०० । हारः ६३ । क्षेपः ९० ।

जाता पूर्ववल्लब्धि क्षेपाणां वल्ली, १ १ १ २ २ १ ९० ० | उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युत इत्यादिकरणेन जातं राशिद्वयम् । २४३० १५३० । जातौ पूर्ववल्लब्धिगुणौ ३० । १८ । अथवा भाज्यक्षेपौ दशभिरपवर्त्य भाज्यः १० । क्षेपः ९ । परस्परभजनाल्लब्धानि फलानि क्षेपः शून्यं चाधोऽधो निवेश्य जाता—

वल्ली ० ६ १ ९ ० | पूर्ववल्लब्धो गुणः ४५ । अत्र लब्धिर्न ग्राह्या । यतो लब्धयो विषमा जाताः अतो गुणः ४५ स्वतक्षणादस्मा ६३ द्विशोधितो जातो गुणः स एव १८ गुणघ्नभाज्ये क्षेप ९० युते हर–६३ भक्ते लब्धिश्च ३० । अथवा हारक्षेपौ ६३।९० नवभिरपवर्त्तितौ जातौ हारक्षेपौ ७।१०।

अत्र लब्धि-क्षेपाणां वल्ली १ १० ० | लब्धा गुणः ७ । क्षेपहारापवर्त्तते ९ गुणितो जातः स एव गुणः १८ । भाज्यभाजकक्षेपेभ्यो लब्धिश्च ३० । अथवा भाज्यक्षेपौ पुनर्हारक्षेपौ चापवर्त्तितौ जातौ भाज्यहारौ १० । ७ । क्षेपः १ ।

अत्र पूर्वव-जाता वल्ली १ २ १ ० | गुणश्च २ । हारक्षेपापवर्त्तनेन गुणितो जातः स एव गुणः १८ । पूर्ववल्लब्धिश्च ३० । इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते इत्यादिनाऽथवा गुणलब्धि ८१ । १३० ।

उदाहरण—भाज्य १००, हार ६३ और क्षेप ९० है, ये तीनों १ अङ्क को छोड़ कर किसी दूसरे अङ्क से नहीं कटते, अतः भाज्य और हर पर से उक्त

रीति द्वारा वल्ली बना कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते' इस सूत्र से ऊर्ध्वाङ्क २४३० और अधराङ्क १५३० होते हैं, जो नीचे के गणित से स्पष्ट है।

वल्ली		
१	१५३० × १ + ९०० = २३४० = ऊर्ध्वाङ्क	ऊर्ध्वाङ्क में १०० से भाग देने पर शेष ३० लब्धि हुई और अधराङ्क में ६३ से भाग देने पर शेष १८ गुणक हुआ।
१	९०० × १ + ६३० = १५३० = अधराङ्क	
१	६३० × १ + २७० = ९००	
२	२७० × २ + ९० = ६३०	
२		
१	२ × ९० + ९० = २७०	
शेष ९०	९० × १ + ० = ९०	

अथवा—

भाज्य और क्षेप को १० से अपवर्तन देकर भाज्य १०, क्षेप ९ और हर ६३ हुये। इस नवीन भाज्य और क्षेप पर से वल्ली बना कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वेहते' इत्यादि विधि से ऊर्ध्वाङ्क २७ और अधराङ्क १७१ हुये।

वल्ली		
०	१७१ × ० + २७ = २७ ऊर्ध्वाङ्क	उर्ध्वाङ्क में दृढ़ भाज्य १० से भाग देकर शेष ७ लब्धि हुई, और अधराङ्क १७१ में ६३ से भाग देने पर शेष ४५ गुणक हुआ। यहाँ 'भवति कुट्टविधेर्युति-
६		
३	२७ × ६ + ९ = १७१ = अधराङ्क	
शेष ९	९ × ३ + ० = २७	

भाज्ययोः' इस सूत्र के अनुसार लब्धि ७ को अपवर्त्तनाङ्क १० से गुणा करने पर वास्तव लब्धि ७० हुआ। यहाँ वल्ली विषम है, अतः लब्धि ७० को अपने तक्षण १०० में घटाने से वास्तव लब्धि ३० और गुणक ३५ को अपने तक्षण ६३ में घटाने से वास्तव गुणक १८ हुआ।

अथवा—हार और क्षेप में ९ का अपवर्तन देने से भाज्य १००, हार और क्षेप १० हुये। उक्तरीति से वल्ली बनाकर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वेहते'

इत्यादि रीति से ऊर्ध्वाङ्क ४३० और अधराङ्क ३० हुये। ऊर्ध्वाङ्क ४३० को १०० से भाग देने पर शेष ३० लब्धि और अधराङ्क ३० को ७ से भाग देकर शेष २ गुणक हुये। यहाँ गुणक को

वल्ली	
१४	३० × १४ + १० = ४३० = ऊर्ध्वाङ्क
३	३ × १० + ० = ३० = अधराङ्क
शेष १०	

अपवर्त्तनाङ्क ९ से गुणा करने पर वास्तव गुणक १८ हुआ।

अथवा—भाज्य और क्षेप को १० का अपवर्त्तन देकर फिर हार और क्षेप में ९ का अपवर्त्तन देने से भाज्य १०, हार ७ और क्षेप १ हुये। अब उक्त प्रकार से वल्ली बना कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते' इस रीति से ऊर्ध्वाङ्क ३ और अधराङ्क २ हुये। यहाँ ऊर्ध्वाङ्क और अधराङ्क को अपने-अपने तक्षण से तक्षित करने पर लब्धि ३ और गुणक २ हुये। अब 'भवति कुट्टविधे-र्युतिभाज्ययोः' इस सूत्र से गुणक २ को हार और क्षेप के अपवर्त्त-नाङ्क ९ से गुणा करने पर वास्तव

वल्ली	
१	२ × १ + १ = ३ = ऊर्ध्वाङ्क
२	२ × १ + ० = २ = अधराङ्क
शेप १	

गुणक १८ हुआ। लब्धि ३ को भाज्य और क्षेप के अपवर्त्तनाङ्क १० से गुणा करने पर ३० वास्तव लब्धि हुई। यहाँ १ इष्ट मानकर 'इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते' इत्यादि रीति से इष्ट १ से भाज्य १०० को गुणा कर उसमें लब्धि ३० को जोड़ने से १३० लब्धि और इष्ट से ६३ को गुणा कर १८ जोड़ने से ८१ गुणक हुये।

विशेषः—ऊपर के गणित से गुणक १८ आया है, अतः १८ से १०० को गुणा कर उसमें ९० जोड़ कर ६३ का भाग देने से निश्शेष होता है, लेकिन ९० घटा कर ६३ का भाग देने पर निःशेष नहीं होता, इसलिये ऋण क्षेप में उक्तरीति से आये हुये गुण-लब्धि को अपने-अपने तक्षण में घटाने से लब्धि और गुणक समझना चाहिये। यहाँ १८ गुणक को अपने तक्षण ६३ में घटाने से ४५ हुआ। इससे १०० को गुणा कर उसमें ९० घटाने पर ४४१० को ६३ से भाग देने पर निश्शेष हुआ। इसी विधि को आगे के सूत्र से ग्रन्थकार स्पष्ट करते हैं।

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

क्षेपजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे ।

क्षेपजे धनक्षेपोद्भवे ये गुणाप्ती ते तक्षणात् शुद्धे सति वियोगजे ऋणक्षेपोद्भवे गुणाप्ती स्तः ।

धनात्मक क्षेप में जो गुणक और लब्धि हों उन्हें अपने-अपने तक्षण में घटाने पर ऋणक्षेप के गुणक और लब्धि होते हैं ।

उपपत्तिः—कुट्टकोक्त्या कल्प्यते ल $= \frac{\text{भा}\cdot \text{गु.} + \text{क्षे.}}{\text{हा}}$,

$\therefore$ भा· गु. + क्षे. = हा· ल., पक्षौ हा· भा अस्मिन् शोधितौ जातौ हा· भा − (भा· गु· + क्षे) = हा· भा − हा· ल, वा हा· भा − भा· गु − क्षे = हा· भा − हा· ल ।

$\therefore$ भा (हा − गु) − क्षे = हा (भा − ल), अत्र यदि 'हा − गु' अयं गुणस्तदा (भा − ल) इयं लब्धिः । अत्र स्वरूपावलोकनेन स्फुटं यत् धनक्षेपीयलब्धि गुणौ स्वस्व तक्षणाच्छुद्धौ ऋणक्षेपीयौ जाताविस्युपपन्नम् ।

अत्र पूर्वोदाहरणे नवतिक्षेपजौ लब्धिगुणौ जातौ ३० । १८ । एतौ स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां १०० । ६३ । शोधितौ ये शेषके तन्मितौ लब्धिगुणौ नवतिशोधिते ज्ञातव्यौ ७० । ४५ । एतयोरपि स्वतक्षणक्षेप इति वा १७० । १०८ । अथवा २७० । १७१ ।

उदाहरण—पहले के उदाहरण में धनात्मक ९० क्षेप से आये हुये लब्धि ३० और गुणक १८ हैं । इनको ऋणक्षेपीय बनाने के लिये अपने-अपने तक्षण १०० और ६३ में क्रम से घटाने पर लब्धि ७० और गुणक ४५ हुये । इसी तरह धनक्षेपीय अन्य लब्धि और गुणक को भी ऋणक्षेपीय बनाना चाहिये ।

द्वितीयोदाहरणम् ।

यद्गुणा गणक षष्टिरन्विता वर्जिता च दशभिः षडुत्तरैः ।
स्यात् त्रयोदशहृता निरग्रका तं गुणं कथय मे पृथक् पृथक् ॥ १ ॥

हे गणक वह गुणक बताओ, जिससे ६० को गुणा कर उसमें १६ जोड़ कर या घटाकर १३ से भाग देने पर निश्शेष होता है ।

न्यासः। भाज्यः ६० हारः १३। क्षेपः १६।

४ ' प्राग्वज्जाते गुणाप्ती २। ८। अत्रापि ल-
वज्जाता वल्ली, १ ब्धयो विषमा अतो गुणाप्ती स्वतक्षणाभ्यां
१
१६ ६०। १३। शोधिते जाते ११। ५२। एवं

शक्षेपे। एतावेव लब्धिगुणौ ५२। ११। स्वहराभ्यां शोधितौ जातौ शविशुद्धौ २। ८।

उदाहरण—भाज्य ६०, हार १३ और क्षेप १६ है। यहाँ उक्तरीति से के द्वारा ऊर्ध्वाङ्क तथा अधराङ्क क्रम से ३६८ और ८० हुये। उर्ध्वाङ्क को । ६० से और अधराङ्क को हर १३ से तष्टित करने पर लब्धि ८ और ; २ हुये। किन्तु वल्ली विषम होने से ८ और २ को अपने-अपने तक्षण में से धन क्षेप की लब्धि (६० − ८)=५२ और गुणक (१३ − २)=११ अब ५२ और ११ को ऋणक्षेपीय लब्धि और गुणक बनाने के लिए ·अपने तक्षण में घटाने से लब्धि ८ और गुणक २ हुये।

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं सार्धवृत्तम्।

गुणलब्ध्योः समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलम्॥ ७॥
हरतष्टे धनक्षेपे गुणलब्धी तु पूर्ववत्।
क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिः शुद्धौ तु वर्जिता॥ ८॥

ीमता तक्षणे गुणलब्ध्योः फलं समं ग्राह्यम्। हरतष्टे धनक्षेपे गुणलब्धी तु ्साध्ये। क्षेप तक्षण लाभाढ्या लब्धिः वास्तवा लब्धिः भवति। शुद्धौ तु ाणलाभेन वर्जिता लब्धिः वास्तवा स्यात्।

ड भाज्य और हर से ऊर्ध्वाङ्क तथा अधराङ्क को क्रम से भाग देने में क समान ही होना चाहिए। जहाँ हर से अधिक क्षेप हो, वहाँ हर से भाग देकर शेष को क्षेप मान कर उक्तरीति से गुणक और लब्धि लाने क वास्तव होता है, लेकिन लब्धि में, हर से क्षेप को तष्टित करने पर ा फल हो, उसे जोड़ने से धन क्षेप में और घटाने से ऋण क्षेप में लब्धि होती है।

ापत्तिः—कुट्टकप्रकारानुसारेण − हा × ल = भा·ग + क्षे. पक्षौ ह· हा·

भा अनेन शोधितौ तदा हा × ल − इ· हा· भा = भा· गु + क्षे − इ· हा· भ
वा हा (ल − इ· भा·) = भा (गु − इ· हा) + क्षे, अत्र यदि ल − इ·
= ल', तथा गु − इ· हा = गु', तदा हा × ल' = भा × गु' + क्षे,

$\therefore \text{ल'} = \dfrac{\text{भा· गु' + क्षे}}{\text{हा}}$ एतेन गुणलब्ध्योः समं ग्राह्यमित्युपपन्नम् । पुनः कुट्टकरीत

हा × ल = भा· गु ± क्षे, अत्र यदि क्षे > हा तदा $\dfrac{\text{क्षे}}{\text{हा}} = \text{ल'} + \dfrac{\text{क्षे· शे}}{\text{हा}}$

$\therefore$ क्षे = हा × ल' + क्षे· शे, $\therefore$ भा· गु ± हा × ल' ± क्षे· शे = हा × ल

$\therefore \text{ल} = \dfrac{\text{भा· गु ± हा × ल' ± क्षे· शे}}{\text{हा}} = \dfrac{\text{भा· गु ± क्षे· शे}}{\text{हा}} \pm \text{ल'}$, अत्र $\dfrac{\text{भा· गु ± क्षे·}}{\text{हा}}$

या लब्धिः सा 'ल'' अनेन क्षेपतक्षणलाभेन संस्कृता सती वास्तवा लब्धि
र्भवतीत्युपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

येन संगुणिताः पञ्च त्रयोविंशतिसंयुताः ।
वर्जिता वा त्रिभिर्भक्ता निरग्राः स्युः स को गुणः ॥ १ ॥

वह गुणक बताओ, जिससे ५ को गुणा कर उसमें २३ जोड़ या घटा क
३ से भाग देने पर निश्शेष होता है ।

न्यासः । भाज्यः ५ । हारः ३ । क्षेपः २३ ।

अत्र वल्ली, $\left.\begin{matrix}१\\१\\२३\\०\end{matrix}\right\}$ पूर्ववज्जातं राशिद्वयम् $\begin{matrix}४६\\२३\end{matrix}$ । एतौ भाज्यहाराभ्यां
तष्टौ । अत्राधोराशौ २३ त्रिभिस्तष्टे सप्त लभ्यन्
ऊर्ध्वराशौ ४६ पञ्चभिस्तष्टे नव लभ्यन्ते तत्र नव न ग्राह्याः । गुणलब्ध्ये
समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलमिति । अतः सप्तैव ग्राह्याः । एवं जा
गुणाप्ती २।११ क्षेपजे तक्षणाच्छुद्धे इति त्रयोविंशतिशुद्धौ जाता विपरीत
शोधनादवशिष्टा लब्धिः ६ । शुद्धौ जाते १।६ ।

इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती । धनर्णये
रन्तरमेव योग इति द्विगुणितौ स्वस्वहारौ क्षेप्यौ यथा धनलब्धिः स्य
दिति कृते जाते गुणाप्ती ७।४ । एवं सर्वत्र । अथवा हरतष्टे धनक्षेपे इति

न्यासः । भाज्यः ५ । हारः ३ । क्षेपः २ ।

पूर्ववज्जाते गुणाप्ती २।५ । एते स्वहराभ्यां विशोधिते शुद्धे जाते १।१

॥ लब्धिः १ । क्षेपतक्षणलाभेन ७ हीना जाता वियोगजा लब्धिः ६ ।
पतक्षणलाभाढ्या लब्धिरिति क्षेपतक्षणलाभेन ७ युक्ता लब्धिः कार्या
तौ क्षेपजौ, लब्धिगुणौ ११।२ । शुद्धौ तु वर्जितेति जाते शुद्धिजे १।६ ।
॥ शुद्धो न भवति तस्माद्विपरीतशोधनेन ऋणलब्धिः ६ । गुणः १ ।
।लब्ध्यर्थं द्विगुणस्वहारक्षेपः क्षिप्ते सति जाते ७।४ ।

उदाहरण—भाज्य ५ हार ३ और क्षेप २३ हैं । यहाँ उक्त रीति से वल्ली
। कर 'उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते' इत्यादि रीति से ऊर्ध्वाङ्क ४६ और अधराङ्क
हुए । यहाँ २३ में उसके तक्षण ३ से भाग देने पर भागफल ७ आता है,
: ४६ में भी उसके तक्षण ५ से भाग देने पर भागफल ९ नहीं ग्रहण कर
के अनुसार ७ ही ग्रहण किया, तो लब्धि ११ और गुणक २ हुए । इनको
ने २ तक्षण ५ और ३ में घटाने से ऋण क्षेपीय लब्धि ६ और गुणक
हुए । अब इष्ट २ मान कर भाज्य ५ को २ से गुणा कर उसमें आई हुई
ध ६ को जोड़ने से ४ लब्धि हुई, और हर ३ को २ से गुणा कर गुणक
जोड़ने पर ७ गुणक हुए ।

अथवा—क्षेप २३ को हर ३ से भाग देने पर शेष २ क्षेप, भाज्य ५ और
३ हुए । यहाँ भी पहले की तरह लब्धि और गुणक लाने पर क्रम से
और २ हुए । इनको अपने २ हरों में घटाने से ऋण क्षेप में लब्धि १ और
क १ हुए । अब सूत्र के अनुसार धनक्षेपीय लब्धि ४ में क्षेपतक्षण फल
ो जोड़ने पर ११ वास्तव लब्धि हुई । ऋणक्षेपीय लब्धि १ में क्षेपतक्षण
७ को घटाने से ऋणात्मक ६ वास्तव लब्धि हुई । धनात्मक लब्धि लाने
र्थे इष्ट २ से भाज्य ५ और हार ३ को गुणा कर उनमें क्रम से ऋणात्मक
ौर १ को जोड़ने से लब्धि ४ और गुणक ७ हुए ।

कुट्टकान्तरे करणसूत्रं वृत्तम् ।

क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुद्धेद्धरोद्धृतः ।
ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र क्षेपो हारहृतः फलम् ॥ ९ ॥

यत्र क्षेपाभावः अथवा हरोद्धृतः क्षेपः शुद्धयेत् तत्र शून्यं गुणः ज्ञेयः । ए.
तः क्षेपः फलं भवति ।

जहाँ क्षेप नहीं हो, या हार से क्षेप में भाग देने पर निःशेष होता है वहाँ गुणक शून्य होता है और क्षेप में हर से भाग देने पर लब्धि होती है।

उपपत्तिः—यत्र कुट्टकोदाहरणे क्षेपाभावस्तत्र वल्ल्यां क्षेपस्थाने शून्यम् तदधोऽपि शून्यमेव तेन तत्र स्वोर्ध्वेहतेऽन्त्येनेत्यादिना लब्धिगुणौ शून्यौ भवतः। एवं यत्र हरोद्धृतः क्षेपः शुद्ध्येत्तत्रापि लब्धिगुणौ शून्यौ, परञ्च 'हरत धनक्षेपे' इत्यादिना क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिः लब्धिः स्यात्सा तु क्षेपतक्षणला तुल्यैवातो हारहृतः क्षेपः फलमित्युपपन्नम्।

उदाहरणम्।

येन पञ्चगुणिताः खसंयुताः पञ्चषष्टिसहिताश्च तेऽथ वा।
स्युस्त्रयोदशहृता निरग्रकास्तं गुणं गणक कीर्तयाशु मे ॥ १ ॥

वह गुणक बताओ, जिससे ५ को गुणा कर उसमें शून्य अथवा ६५ जो कर १३ से भाग देने पर निःशेष होता है।

न्यासः। भाज्यः ५। हारः १३। क्षेपः०

ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र क्षेपो हारहृतः फलमिति। क्षेपाभावे गुण प्ती० । ० इष्टाहत इति अथवा १३।५। वा २६।१०।

न्यासः। भाज्यः ५। हारः १३। क्षेपः ६५।

क्षेपः शुद्धेद्धरोद्धृतः। ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र क्षेपो हारहृतः फलमि जाते गुणाप्ती० । ५। वा १३। १०। अथवा २६। १५। इत्यादि।

उदाहरण—भाज्य ५ हार १३ और क्षेप ० हैं। अब सूत्र के अनुस गुणक शून्य हुआ और हार १३ से क्षेप ० में भाग देने पर लब्धि भी शू ही आई। इष्ट १ मान कर 'इष्टाहतस्वस्वहरेण' इत्यादि सूत्र से लब्धि ५ गुणक १३ हुए। एवं २ इष्ट पर से लब्धि और गुणक क्रम से १० और होते हैं। यदि क्षेप ६५ हो, तो हार १३ से भाग देने पर क्षेप निश्शेष हो है, अतः गुणक शून्य और हार १३ से क्षेप ६५ में भाग देने पर भागप ५ लब्धि हुई। एवं इष्ट १ और २ पर से 'इष्टाहतस्वस्वहरेणयुक्ते' इत्या रीति से लब्धि गुणक १०।१३ और १५।२६ होते हैं।

अथ सर्वत्र कुट्टके गुणलब्ध्योरनेकधादर्शनार्थं करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती ॥

वा ते गुणलब्धी इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते तदा बहुधा गुणाप्ती भवेताम् ।

उक्त रीति से जो गुणक और लब्धि हों, उसको कल्पित इष्ट से गुणे हुए अपने २ तक्षण में जोड़ने से अनेक प्रकार के गुणक और लब्धि होती हैं ।

अस्योदाहरणानि दर्शितानि पूर्वमिति ।

उदाहरण—इसका गणित पूर्व उदाहरण में स्पष्ट है ।

उपपत्तिः—कुट्टकप्रमानुसारेण भा· गु ± क्षे = हा· ल, पक्षौ 'इ· भा· हा' अनेन युक्तौ तदा, भा· गु ± क्षे + इ· भा· हा = हा· ल + इ· भा· हा

∴ भा (गु + इ· हा) ± क्षे = हा (ल + इ· भा)

$$\therefore \text{ल} + \text{इ}\cdot\text{भा} = \frac{\text{भा}\,(\,\text{गु} + \text{इ}\cdot\text{हा}\,) \pm \text{क्षे}}{\text{हा}}$$ अत्र यदि गुणकः = गु + इ· हा,

तदा लब्धिः = ल + इ· भा, अत उपपन्नं सर्वम् ।

अथ स्थिरकुट्टके करणसूत्रं वृत्तम् ।

क्षेपे तु रूपे यदि वा विशुद्धे स्यातां क्रमाद्ये गुणकारलब्धी ।
अभीप्सितक्षेपविशुद्धिनिघ्न्यौ स्वहारतष्टे भवतस्तयोस्ते ॥ १० ॥

रूपमितधनक्षेपे वा विशुद्धे ऋणक्षेपे क्रमात् ये गुणकारलब्धी स्यातां ते अभीप्सितक्षेपविशुद्धिनिघ्न्यौ स्वहारतष्टे तयोः धनर्णक्षेपयोः ते गुणकारलब्धी भवतः ।

क्षेप में यदि बड़ी संख्या हो, तो वहाँ धन या ऋण क्षेप के अनुसार १ क्षेप कल्पना कर उक्त रीति से गुणक और लब्धि को साधन कर उनको अपने अभीष्ट क्षेप से गुणा कर अपने २ हार से भाग देने पर शेष गुणक और लब्धि होते हैं ।

उपपत्तिः—कुट्टकोक्त्या हा· ल = भा· गु· ± क्षे,

$$\therefore \frac{\text{हा}\cdot\text{ल}}{\text{क्षे}} = \frac{\text{भा}\cdot\text{गु}}{\text{क्षे}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क्षे}} = \frac{\text{भा}\cdot\text{गु}}{\text{क्षे}} \pm 1$$ अत्र हारभाज्यक्षेपाः परस्परं

दृढास्तेनात्र ल, गु क्षेपेण निःशेषौ भवतोऽतो यदि $\frac{\text{ल}}{\text{क्षे}} = \text{लं}$, एवं $\frac{\text{गु}}{\text{क्षे}} = \text{गुं}$,
तदा $\text{ल} = \text{लं} \cdot \text{क्षे}$, $\text{गु} = \text{गुं} \cdot \text{क्षे}$, $\therefore \text{हा} \cdot \text{क्षे} \cdot \text{लं} = \text{भा} \cdot \text{क्षे} \cdot \text{गुं} \pm \text{क्षे}$,

$\therefore \text{हा} \cdot \text{लं} = \text{भा} . \text{गुं} \pm १ \; \therefore \text{लं} = \frac{\text{भा} \cdot \text{गुं} \pm १}{\text{हा}}$ अत्रापि कुट्टकोक्त्या लब्धिगुणौ क्षेपेण गुणितौ तदा वास्तवौ भवतोऽत उपपन्नम् ।

प्रथमोदाहरणे दृढभाज्यहारयो रूपक्षेपयोर्न्यासः । भाज्यः १७ । हारः १५ । क्षेपः १ । अत्र गुणाप्ती ७ । ८ । एते त्विष्टक्षेपेण पञ्चकेन गुणिते स्वहारतष्टे च जाते ५ । ६ । अथवा रूपशुद्धौ गुणाप्ती ७ । ८ । तक्षणाच्छुद्धे जाते गुणाप्ती ८ । ९ । एते पञ्चगुणे स्वहारतष्टे च जाते १० । ११ । एवं षष्टिविशुद्धौ । एवं सर्वत्र ।

उदाहरण—भाज्य १७ हार १५ और क्षेप ५ के स्थान में १ कल्पना किया । अब उक्तरीति से गुणक और लब्धि क्रम से ७ और ८ हुए । इनको अभीष्ट क्षेप ५ से गुणा कर अपने-अपने हार से भाग देने पर शेष गुणक ५ और लब्धि ६ हुए । वा ऋणात्मक १ क्षेप कल्पना करने से गुणक ७ और लब्धि ८ होते हैं । इनको अपने-अपने तक्षण में घटाने से गुणक और लब्धि क्रम से ८ और ९ हुए । इनको अभीष्ट क्षेप ५ से गुणा कर अपने-अपने हार से भाग देने पर शेष गुणक १० और लब्धि ११ हुए । इसी तरह ६० ऋणक्षेप में समझना चाहिए ।

अस्य ग्रहगणिते उपयोगस्तदर्थं किञ्चिदुच्यते ।

कल्प्याऽथ शुद्धिर्विकलावशेषं षष्टिश्च भाज्यः कुदिनानि हारः ।
तज्जं फलं स्युर्विकला गुणस्तु लिप्ताग्रमस्माच्च कला लवाग्रम् ॥११॥
एवं तदूर्ध्वञ्च तथाऽधिमासावमाग्रकाभ्यां दिवसा रवीन्द्वोः ॥१२॥

इस सूत्र से ग्रह के विकलाशेष पर से ग्रह और अहर्गण का साधन किया गया है । इसमें भाज्य ६०, हार कुदिन और क्षेप ऋणात्मक विकला-शेष मान कर कुट्टक की रीति से लब्धि विकला और गुणक कला-शेष होगा । बाद में कला शेष को ऋणात्मक क्षेप मानकर उक्त भाज्य और हर पर से ही कुट्टक द्वारा लब्धि कला और गुणक भाग-शेष होगा । एवं भाज्य ३० हार कुदिन

और भाग-शेष को ऋणक्षेप मानकर कुट्टक रीति से लब्धि अंश और गुणक राशि-शेष होगा। बाद में भाज्य १२, हार कुदिन और ऋणात्मक राशि-शेष को क्षेप मान कर उक्त रीति से लब्धि राशि और गुणक भगण शेष होगा। इसके बाद कल्प ग्रह-भगण भाज्य, कुदिन हार और ऋणात्मक भगण-शेष को क्षेप कल्पना कर कुट्टक-रीति से लब्धि गत भगण और गुणक अहर्गण होगा। इसी तरह कल्पाधिमास भाज्य, सौर दिन हार और ऋणात्मक अधिमास-शेष को क्षेप मानकर कुट्टक की रीति से लब्धि गत अधिमास और गुणक गत सौर दिन होगा। गत चान्द्र-दिन जानने के लिए कल्पावमदिन भाज्य, चान्द्रदिन हार और ऋणात्मक अवम शेष को क्षेप मान कर कुट्टक से लब्धि गत अवम और गुणक गत चान्द्र-दिन होगा। गत रवि-दिन और गत चान्द्र-दिन जानने के लिए अधिमास-शेष और अवम-शेष का ज्ञान अपेक्षित है।

उपपत्तिः—भगणादिको ग्रहः $= \dfrac{\text{क ग्र भ} \times \text{अ}}{\text{क कु}} = \text{गभ} + \dfrac{\text{भ-शे}}{\text{क कु}}$

$\therefore$ $\text{ग}\cdot\text{भ} = \dfrac{\text{क ग्र भ} \times \text{अ} - \text{भशे}}{\text{क कु}}$, ततः $\dfrac{१२ \times \text{भशे}}{\text{क कु}} = \text{गरा} + \dfrac{\text{राशे}}{\text{क कु}}$

$\therefore$ $\text{गरा} = \dfrac{१२ \times \text{भशे} - \text{राशे}}{\text{क कु}}$, $\therefore$ $\dfrac{\text{राशे} \times ३०}{\text{क कु}} = \text{ग}\cdot\text{अं} + \dfrac{\text{अंशे}}{\text{क कु}}$

$\therefore$ $\text{ग}\cdot\text{अं} = \dfrac{\text{राशे} \times ३० - \text{अंशे}}{\text{क कु}}$, एवं $\dfrac{\text{अंशे} \times ६०}{\text{क कु}} = \text{कला} + \dfrac{\text{कलाशे}}{\text{क कु}}$

$\therefore$ $\text{कला} = \dfrac{\text{अंशे} \times ६० - \text{कलाशे}}{\text{क कु}}$, तथा $\dfrac{६० \times \text{कशे}}{\text{क कु}} = \text{विकला} + \dfrac{\text{विशे}}{\text{क कु}}$

$\therefore$ $\text{विकला} = \dfrac{६० \text{ कशे} - \text{विशे}}{\text{क कु}}$ अत उपपन्नम् सर्वम्।

ग्रहस्य विकलावशेषेण ग्रहाहर्गणयोरानयनम्। तद्यथा। तत्र षष्टि-र्भाज्यः। कुदिनानि हारः। विकलावशेषं शुद्धिरिति प्रकल्प्य साध्ये गुणाप्ती तत्र लब्धिर्विकलाः स्युः। गुणस्तु कलावशेषम्।

एवं कलावशेषं शुद्धिस्तत्र षष्टिर्भाज्यः। कुदिनानि हारः। लब्धिः कला गुणो भागशेषम्।

भागशेषं शुद्धिः। त्रिंशद्भाज्यः। कुदिनानि हारः। फलं भागा गुणो राशिशेषम्।

एवं राशिशेषं शुद्धिः। द्वादश भाज्यः। कुदिनानि हारः। फलं गत-राशयः। गुणो भगणशेषम्।

कल्पभगणा भाज्यः। कुदिनानि हारः। भगणशेषं शुद्धिः फलं गत-भगणाः। गुणोऽहर्गणः स्यादिति।

अस्योदाहरणानि त्रिप्रश्नाध्याये।

एवं कल्पाधिमासा भाज्यः। रविदिनानि हारः। अधिमासशेषं शुद्धिः। फलं गताधिमासा गुणो गतरविदिवसाः।

एवं युगावमानि भाज्यः। चान्द्रदिवसा हारः। अवमशेषं शुद्धिः। फलं गतावमानि। गुणो गतचान्द्रदिवसा इति।

उदाहरण—ग्रह का विकला-शेष ११ का ज्ञान है, तो ग्रह और अहर्गण का ज्ञान करना है। अब सूत्र के अनुसार भाज्य ६० कुदिन १९ हार और विकला-शेष ११ को ऋणात्मक क्षेप मान कर कुट्टक-द्वारा लब्धि २९ और गुणक ८ हुए। इनको ऋण-क्षेपीय बनाने के लिये अपने २ तक्षण में घटाने से लब्धि ३१ विकला और गुणक १० कला-शेष हुए। अब कला-शेष को ऋण-क्षेप मान कर उक्त भाज्य और हर पर से वल्ली-द्वारा ऊर्ध्वाङ्क १९० और अधराङ्क ६० हुए। इनको अपने २ तक्षण से तष्टित करने से लब्धि १० और गुणक ३ हुए। इनको ऋण-क्षेपीय बनाने के लिये अपने २ तक्षण में घटाने पर लब्धि ५० कला और गुणक १६ अंश-शेष हुए। अब अंश-शेष को क्षेप मान कर भाज्य ३० और हार १९ पर से कुट्टक-द्वारा लब्धि २६ अंश और गुणक १७ राशि-शेष हुआ। इसी तरह उक्त रीति से क्रिया करने पर अन्त में लब्धि ६ गत भगण और गुणक १३ अहर्गण हो जायगा। आगे अवमशेष और अधिशेष पर से उक्त रीति-द्वारा गत चान्द्र-दिन और गत रवि-दिन का ज्ञान क्रम से करना चाहिये।

संश्लिष्टकुट्टके करणसूत्रं वृत्तम्।

एको हरश्चेद्गुणकौ विभिन्नौ तदा गुणैक्यं परिकल्प्य भाज्यम्।
अग्रैक्यमग्रं कृत उक्तवद्यः संश्लिष्टसंज्ञः स्फुटकुट्टकोऽसौ॥ १३॥

एकः हरः चेत् गुणकौ विभिन्नौ तदा गुणैक्यं भाज्यं परिकल्प्य अग्रैक्यं

(शेषयोगं) अग्रं (ऋणक्षेपं) प्रकल्प्य उक्तवत् यः कुट्टकः कृतः असौ स्फुटकुट्टकः संश्लिष्टसंज्ञः स्यात् ।

जिस उदाहरण में एक ही राशि के गुणक अनेक हों और हर एक ही हो, तो गुणकों के योग को भाज्य और शेषों के योग को ऋण-क्षेप मान कर उक्त रीति से जो गुणक आवे वह वास्तव गुणक होगा । लब्धि वास्तव नहीं होती अतः उसे छोड़ देना चाहिये ।

उपपत्तिः—कल्प्यते भा· गु $\pm$ क्षे = हा· ल तथा भा· गुं $\pm$ क्षे' = हा· लं

$\therefore$ भा· गु $\pm$ क्षे + भा· गुं $\pm$ क्षे' = हा· ल + हा लं

$\therefore$ भा (गु + गुं) $\pm$ क्षे + क्षे' = हा (ल + लं)

$\therefore$ ल + लं = $\dfrac{\text{भा (गु + गुं) } \pm \text{ (क्षे + क्षे')}}{\text{हा}}$ अत उपपन्नम् ।

उदाहरणम् ।

कः पञ्चनिघ्नो विहृतस्त्रिषष्ट्या सप्तावशेषोऽथ स एव राशिः ।
दशाहतः स्याद्विहृतस्त्रिषष्ट्या चतुर्दशाग्रो वद राशिमेनम् ॥ १ ॥

वह राशि बताओ जिसे पहली जगह ५ से और दूसरी जगह १० से गुणा कर दोनों को ६३ से भाग देने पर क्रम से ७ और १४ शेष बचते हैं ।

अत्र गुणैक्यं भाज्यः । अग्रैक्यं शुद्धिः ।

न्यासः । भाज्यः १५ । हारः ६३ । क्षेपः २१ ।

पूर्ववज्जातो गुणः ७ । फलम् २ । एतौ स्वतक्षणाभ्यां शोधितौ जातौ वियोगजौ लब्धिगुणौ ३ । १४ ।

इति लीलावत्यां कुट्टकाध्यायः ।

उदाहरण—यहाँ सूत्र के अनुसार गुणक ५ और १० के योग १५ को भाज्य और शेष ७ और १४ के योग २१ को ऋणात्मक क्षेप एवं ६३ हर को हर मान कर तीनों को ३ से अपवर्त्तन देने पर दृढ भाज्य ५, हार २१ और ऋणक्षेप ७ हुए । इन पर से कुट्टक-विधि से वल्ली द्वारा ऊर्ध्वाङ्क ७ और अधराङ्क २८ हुए । इनको अपने २ तक्षण से भाग देने पर शेष २ लब्धि और ७ गुणक हुए । इन्हें ऋणक्षेपीय बनाने के लिये अपने २ तक्षण में घटाने से लब्धि ३ और गुणक १४ हुए ।

इति लीलावत्यां तत्त्वप्रकाशिकोपेतः कुट्टकाध्यायः ।

अथ गणितपाशे निर्दिष्टाङ्कैः संख्याया विभेदे
करणसूत्रं वृत्तम् ।

थानान्तमेकादिचयाङ्कघातः संख्याविभेदा नियतैः स्युरङ्कैः ।
ाक्तोऽङ्कमित्याङ्कसमासनिघ्नः स्थानेषु युक्तो मितिसंयुतिः स्यात् ॥

स्थानान्तं एकादिचयाङ्कघातः नियतैः अङ्कैः संख्याविभेदाः स्युः । स अङ्क-मासनिघ्नः अङ्कमित्या भक्तः, स्थानेषु युक्तः तदा मितिसंयुतिः स्यात् ।

अङ्क के स्थान पर्यन्त एकादि अङ्कों का घात करने से संख्या के भेद होते । उसे अङ्कों के योग से गुणा कर स्थानाङ्क संख्या से भाग देकर लब्धि को ङ्क तुल्य स्थान में उत्तरोत्तर एक संख्या बढ़ा कर लिख करके योग करने से भी संख्या भेदों का योग होता है ।

उपपत्तिः—कल्प्यते प = संख्याङ्कः = १ स्थानसंख्याभेदः । अथ चेत् ंख्यायां स्थानद्वयं भवेत्तदा तत्र द्वितीयोऽङ्कः = च । अस्य पूर्वाङ्कपार्श्वयोः पृथक् िवेशेन द्वौ भेदौ भवतस्तेनानुपातः—एकाङ्कस्यैकपार्श्वे द्वितीयाङ्कनिवेशेन यद्येको दस्तदा पार्श्वद्वयनिवेशेन किमिति स्थानद्वयसंख्याभेदौ यथा, पच । चप यदि ंख्यायां स्थानत्रयं भवेत्तदा तृतीयाङ्कस्य पूर्वकथित प्रत्येक भेदस्यादिमध्याव-ानेषु स्थापनेन त्रयस्त्रयोभेदा भवन्ति । ततोऽनुपातेन—स्थानत्रयाणां संख्या-ेदा भवन्ति । यथा—यद्येकभेदेन त्रयो भेदा भवन्ति तदा पूर्वसाधितस्थान-यभेदेन किमिति जाता भेदाः । एवं चतुर्थाङ्कस्य स्थानत्रयसंख्याभेदेषु प्रत्येक-यादिमध्योपान्तेषु स्थापनेन चत्वारश्चत्वारो भेदा भवन्ति, तेनानुपातो यद्येक-ेदेन चत्वारो भेदास्तदा स्थानत्रयसंख्याभेदैः किमिति जाताः स्थानचतुष्टय-ंख्याभेदाः । एवमग्रेऽपि ज्ञेयमेतेनोपपन्नं पूर्वार्धम् ।

पूर्वसाधितभेदेष्वेकाद्यङ्कस्थानीयाङ्कयोगनिमित्तं तु स्थानतुल्याङ्कानां योगोऽ-ङ्कयोगस्तेनानुपातः—स्थानमितौ यद्यङ्कयोगतुल्योयोगस्तदोक्तभेदमितौ किमित्ये-कस्थानीयाङ्कयोगः । अथैकस्थानीयाङ्कयोगतुल्य एव दशाद्यस्थानीयाङ्कयोगोऽपि ेषां पुनः पुनर्विन्यासात् । तेनास्यैव स्थानान्तरेण योगः सर्वभेदयोगो भवितु-मर्हतीत्यत उपपन्नं सर्वम् ।

अत्रोद्देशकः ।

द्विकाष्टकाभ्यां त्रिनवाष्टकैर्वा निरन्तरं द्व्यादिनवावसानैः ।
संख्याविभेदाः कति सम्भवन्ति तत्संख्यकैक्यानि पृथग्वदाशु ॥ १ ॥

२, ८ और ३, ९, ८ तथा २ से लेकर ९ पर्यन्त अङ्कों के क्रम से दो, तीन और आठ अङ्कों से बनी संख्या के भेद बताओ । एवं उन भेदों के अलग २ योग बताओ ।

न्यासः । २ । ८ । अत्र स्थाने २ । स्थानान्तमेकादिचयाङ्कौ १ । २ । घातः २ । एवं जातौ संख्याभेदौ २ । अथ स एव घातोऽङ्कसमास १० निघ्नः २० । अङ्कमित्यानया २ भक्तः १० । स्थानद्वये युक्तो जातं संख्यैक्यम् । ११० ।

द्वितीयोदाहरणे ।

न्यासः । ३ । ९ । ८ । अत्रैकादिचयाङ्काः १ । २ । ३ । घातः ६ एतावन्तः संख्याभेदाः । घातः ६ अङ्कसमासा २० हतः १२० । अङ्कमित्या भक्तः ४० । स्थानत्रये युक्तो जातं संख्यैक्यम् ४४४० ।

तृतीयोदाहरणे ।

न्यासः । २ । ३ । ४ । ५ । ६ । ७ । ८ । ९ । एवमत्र संख्याभेदाश्चत्वारिंशत्सहस्राणि शतत्रयं विंशतिश्च ४०३२० । संख्यैक्यञ्च चतुर्विंशतिनिखर्वाणि त्रिषष्टिपद्मानि नवनवतिकोटयः नवनवतिलक्षाः पञ्चसप्ततिसहस्राणि शतत्रयं षष्टिश्च २४६३९९९९७५३६० ।

उदाहरण—पहले प्रश्न में २ और ८ से दो स्थान वाली संख्या का भेद निकालना है, अतः दो स्थान तक एकादि अङ्कों का गुणनफल = १ × २ = २ यह संख्या का भेद हुआ अर्थात् इन अङ्कों से दो ही संख्या बन सकती हैं, जैसे २८ और ८२ । अब भेद-संख्या २ को अङ्कों के योग (२ + ८ =) १० से गुणा करने पर २० हुआ । इसे स्थान संख्या २ से भाग देने पर १० हुआ । इसे दो जगह में क्रम से एक स्थान बढ़ा कर रख कर के योग करने से (१०
 १० = ११०) संख्याओं का योग हुआ । दूसरे उदाहरण में ३, ९ और ८ हैं । सूत्र के अनुसार तीन स्थान तक एकादि अङ्कों का घात १ × २ × ३=६ संख्या-भेद हुआ । अब भेद संख्या ६ को अङ्कों के योग (३ + ९ + ८=) २०

गुणा कर ६ × २० = १२० को स्थान-संख्या ३ से भाग देने पर ४० आ। इसे तीन जगह क्रम से एक स्थान बढ़ा कर रख के योग करने पर

$\begin{array}{r} ४० \\ ४० \\ ४० = ४४४० \end{array}$) संख्याओं का योग हुआ। तीसरे उदाहरण में २ से ९

क का घात करने से ४०३२० संख्या-भेद को अङ्कों के योग ४४ से गुणा कर ङ्क मिति ८ से भाग देने पर २२१७६० हुआ। इसको ८ स्थान तक एक गह बढ़ा कर लिख के योग करने से संख्याओं का योग २४६३९९९९७५३६० आ।

उदाहरणम्।

ाशाङ्कुशाहिडमरूककपालशूलैः खट्वाङ्गशक्तिशरचापयुतैर्भवन्ति।
न्योऽन्यहस्तकलितैः कति मूर्तिभेदाः शम्भोर्हरेरिव गदारिसरोजशङ्खैः॥

श्रीशङ्करजी के दशों हाथ में पाश, अङ्कुश, सर्प, डमरू, कपाल, त्रिशूल, ट्वाङ्ग, शक्ति, शर और धनुष को परस्पर बदल कर रखने से इनके मूर्त्ति-ेद कितने होंगे। इसी प्रकार विष्णु के चारों हाथों में गदा, चक्र, कमल और ाङ्ख को परस्पर बदल कर रखने से इनकी मूर्ति के भेद बताओ।

न्यासः। स्थानानि १०। जाता मूर्तिभेदा ३६२८८००। एवं हरेश्च २४।

उदाहरण—पहले प्रश्न में १० अस्त्र हैं, अतः एकादि दश अङ्कों का घात करने से ३६२८८०० शङ्कर के मूर्त्तिभेद हुए। विष्णु के ४ अस्त्र हैं अतः ४ का भेद २४ हुआ।

विशेषे करणसूत्रं वृत्तम्।

यावत्स्थानेषु तुल्याङ्कास्तद्भेदैस्तु पृथक्कृतैः।
प्राग्भेदा विहृता भेदास्तत्संख्यैक्यञ्च पूर्ववत्॥ १॥

यावत् स्थानेषु तुल्याङ्काः स्युः पृथक् कृतैः तद्भेदैः प्राग्भेदाः विहृताः तदा भेदा भवन्ति। तत्संख्यैक्यञ्च पूर्ववत् ज्ञेयम्।

संख्या में जितने अङ्क समान हों, उतने अङ्कों के पृथक् भेद लाकर उससे पूर्व-साधित भेद संख्या में भाग देने पर भेद की संख्या होगी। संख्या का योग

उपपत्तिः—अथ यदि कस्याश्चित् संख्यायां समाना एवाङ्काः स्युस्तदा तद्भेदस्त्वेक एव। यदि च तस्यां तुल्या अतुल्याश्चाङ्कास्तदा तद्भेदार्थं कल्प्यन्ते संख्यायां सहाङ्का, यत्र चत्वारस्तुल्यास्तेन संख्यास्थानानि सह। अत्र पूर्वरीत्या भेदाः = १ × २ × ३ × ४ × ५ × ६ × ७ = पूर्वोक्त स्थान चतुष्टय भेद × ५ × ६ × ७, अत्र चत्वारस्तुल्याङ्काः सन्ति तेन पूर्वयुक्त्या स्थान चतुष्टयभेदो रूप तुल्यः स्यादतः पूर्वोक्तभेदाः = १ × ५ × ६ × ७

$$= \frac{\text{पूर्वोक्त स्थानचतुष्टय भेद} \times ५ \times ६ \times ७}{\text{पूर्वोक्त स्थानचतुष्टय भेद}} = \frac{१ \times २ \times ३ \times ४ \times ५ \times ६ \times ७}{\text{पूर्वोक्त स्थानचतुष्टय भेद}}$$

अत उपपन्नम्। संख्यैक्यस्य वासना पूर्ववज्ज्ञेया।

अत्रोद्देशकः।

द्विद्व्येकभूपरिमितैः कति संख्यकाः स्युस्तासां युतिञ्च गणकाशु मम प्रचक्ष्व।
अम्भोधिकुम्भिसरभूतशरैस्तथाङ्कैश्चेदङ्कपाशविधियुक्तिविशारदोऽसि ॥१॥

हे गणक, २, २, १ और १ अङ्कों की संख्या और उनका योग एवं ४, ८, ५, ५ और ५ संख्या के भेद तथा उनका योग बताओ।

न्यासः २ । २ । १ । १ । अत्र प्राग्वद्भेदाः २४ । यावत्स्थानेषु तुल्याङ्का ति। अथैवं प्रथमं तावत्स्थानद्वये तुल्यौ। प्राग्वत् स्थानद्वयाज्जातौ भेदौ २। पुनरन्यत्रापि स्थानद्वये तुल्यौ। तत्राप्येवं भेदौ २। भेदाभ्यां ाग्भेदाः २४ भक्ता जाता भेदाः ६। तद्यथा २२११। २१२१। २११२। २१२। १२२१। ११२२। पूर्ववत्संख्यैक्यञ्च ६६६६।

न्यासः। ४। ८। ५। ५। ५। अत्रापि पूर्ववद्भेदाः १२०। स्थान-योत्थभेदै ६ भक्ता जाताः २०। तद्यथा—

४८५५५। ८४५५५। ५४८५५।
५८४५५। ५५४८५। ५५८४५।
५५५४८। ५५५८४। ४५८५५।
४५५८५। ४५५५८। ८५४५५।
८५५४५। ८५५५४। ५४५८५।
५८५४५। ५५४५८। ५५८५४।

५ ४ ५ ५ ८ । ५ ८ ५ ५ ४ । एवं विंशति ।

अथ संख्यैक्यश्च ११६६६६८८ ।

उदाहरण—प्रथम प्रश्न में (२, २, १, १) चार अङ्क हैं, अतः पूर्व रीति से भेद (१ × २ × ३ × ४) = २४ हुआ। अत्र तुल्य दो, दो अङ्कों के भेद २ और २ अर्थात् ४ से, २४ में भाग देने से ६ वास्तव भेद हुआ। द्वितीय उदाहरण में पहली रीनि से एकादि ५ अङ्कों का घात करने से १२० हुआ। इस उदाहरण में तीन स्थान ५, ५, ५ तुल्य हैं, अतः इन तीनों के भेद ६ से १२० में भाग देने पर २० वास्तव भेद हुआ। संख्यैक्य जानने के लिए पहले उदाहरण के भेद ६ को अङ्क योग ६ से गुणा कर उसे स्थान संख्या ४ से भाग देने पर ९ हुआ। इसको एक-एक स्थान बढ़ा कर ४ स्थानों में लिख कर जोड़ा तो ९९९९ प्रथम प्रश्न का संख्यैक्य हुआ। इसी तरह दूसरे उदाहरण के भेद २० को अङ्कयोग २७ से गुणाकर उसे स्थान संख्या ५ से भाग देने पर लब्धि १०८ हुई। इसे एक स्थान बढ़ा कर ५ स्थानों में लिख कर योग करने से संख्यैक्य ११९९९८८ हुआ।

अनियताङ्कैरतुल्यैश्च विभेदे करणसूत्रं वृत्तार्धम् ।

स्थानान्तमेकापचितान्तिमाङ्कघातोऽसमाङ्कैश्च मितिप्रभेदाः ।

असमाङ्कैः स्थानान्तं एकापचितान्तिमाङ्कघातः मितिप्रभेदाः स्युः ।

स्थानान्त पर्यन्त अन्त के अङ्क में एक-एक घटा कर रखे हुये अङ्कों का घात करने से दिये हुए अनियत और अतुल्य अङ्कों की संख्या के भेद होते हैं।

उपपत्तिः—अत्रान्तिमाङ्को नवैव ग्राह्योऽङ्कानां नवमितत्वात्। अथ संख्यायां यद्येकं स्थानं भवेत्तदा नवभिरङ्कैर्नवभेदा भवन्ति तत्राङ्कस्यानियतत्वात्। यदि संख्यायां स्थानद्वयं तदा पूर्वकथितैकस्थानभेदेषु प्रत्येकेषु निजातिरिक्ताङ्कस्थापनेनैकोनान्तिमाङ्कतुल्या भेदास्तथा स्थानत्रयात्मकसंख्यायां स्थानद्वयाङ्कभेदेषु प्रत्येकेषु निजाङ्कद्वयातिरिक्ताङ्कस्थापनेन द्व्यूनान्तिमाङ्कसमाभेदा भवन्ति। ततोऽनुपातेन—स्थानद्वयसंख्या भेदाः = $\frac{(\text{अन्तिम अङ्क} - 1)\ \text{सर्वभेद}}{1\ \text{भेद}}$ । एवं स्थानत्रयसंख्याभेदा भवन्ति, यथा—स्थानद्वयभेदेष्वेकभेदेन यदि द्व्यूनान्तिमाङ्कसमभेदास्तदा सर्वेषु स्थानद्वयभेदेषु किमिति जाता भेदाः—

$$= \frac{\text{स्थानद्वयभेद} \times (\text{अन्तिमाङ्क} - २)}{१}$$

$$= \frac{(\text{अन्तिम अङ्क} - १)\ \text{सर्व भेद} \times (\text{अन्तिमाङ्क} - २)}{२}$$, अत्र सर्वभेद = अन्तिमाङ्क, अतः (अ· अं – १) अ· अं (अ· अं – २), एवमग्रेऽपि ज्ञेयमत उपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम् ।

स्थानषट्कस्थितैरंकैरन्योन्यं खेन वर्जितैः ।
कति संख्याविभेदाः स्युर्यदि वेत्सि निगद्यताम् ॥ १ ॥

शून्य को छोड़ कर, ६ स्थान में स्थित अङ्कों से संख्या के कितने भेद होंगे, यह बताओ ।

अत्रान्तिमाङ्को नव ९ । अत्रान्त्याङ्को यावत्स्थानमेकापचितेन न्यासः । ९ । ८ । ७ । ६ । ५ । ४ । एषां घाते जाताः संख्याभेदाः ६०४८० ।

उदाहरण—यहाँ अन्तिम अङ्क ९ और संख्या में स्थान ६ हैं, अतः अन्तिम अङ्क ९ से आरम्भ कर एक अपचित (न्यून) क्रम से ६ स्थान पर्यन्त अङ्कों के घात ९ × ८ × ७ × ६ × ५ × ४ = ६०४८० संख्या का भेद हुआ ।

अन्यत्करणसूत्रं वृत्तद्वयम् ।

निरेकमङ्कैक्यमिदं निरेकस्थानान्तमेकापचितं विभक्तम् ॥ ३ ॥
रूपादिभिस्तन्निहतैः समाः स्युः संख्याविभेदा नियतेऽङ्कयोगे ।
नवान्वितस्थानकसंख्यकाया ऊनेऽङ्कयोगे कथितं तु वेद्यम् ॥ ४ ॥
संक्षिप्तमुक्तं पृथुताभयेन नान्तोऽस्ति यस्माद्गणितार्णवस्य ।

अङ्कयोगे नियते (सति) अङ्कैक्यं निरेकं (कृत्वा) निरेकस्थानान्तं एकापचितं (स्थाप्यम्) । इदं रूपादिभिः विभक्तं तन्निहतेः समाः संख्याविभेदाः स्युः । कथितं तु अङ्कयोगे नवान्वितस्थानकसंख्यकायाः ऊने (सति) वेद्यम् । पृथुताभयेन संक्षिप्तं उक्तम्, यस्मात् गणितार्णवस्य अन्तः न अस्ति ।

यदि संख्या में अङ्कों का योग नियत हो, तो अङ्कों के योग में १ घटा कर उसे निरेक स्थान तक एक-एक अपचित (घटा) कर क्रम से रख के उनमें १ आदि से भाग देकर भाग फलों का गुणन फल संख्या का भेद होता है । ऐसी स्थिति में अङ्कों का योग ९ से युत स्थान-संख्या से कम ही होना चाहिए।

विस्तार के भय से मैंने संक्षेप में कहा क्योंकि गणित रूपी समुद्र का अन्त नहीं है।

उपपत्तिः—यदि शून्यरहितसंख्यायां स्थानमितिद्व्यादिमिता तथा स्थानाङ्कयोगस्तु स्थानमितितुल्यस्तदधिको वा तदैवास्य सूत्रस्य प्रयोजनमिति स्पष्टमेवातो यदि संख्यायां स्थानद्वयं तथाङ्कयोगः = २ तदा शून्यरहिता संख्यैकैकैकादश भवितुमर्हति तेन संख्याभेदः = १ = (अङ्कयोग - १)। एवमेव तत्रैव यद्यङ्कयोगः = ३ तदा शून्यवर्जिते संख्ये १२, २१ अतः संख्याभेदौ = २ = (अङ्कयोग - १)। यदि च तत्रैवाङ्कयोगः = ४, तदा संख्याः १३, २२, ३१। अतः संख्याभेदाः = ३ = (अङ्कयोग - १)। एवमग्रेऽपि संख्यायां स्थानद्वये रूपोनयोगतुल्याः संख्याभेदा भवन्ति। यदि संख्यायां स्थानत्रयं तथाङ्कयोगः=३ तदा शून्यवर्जितसंख्या = १११। अतः संख्याभेदः = १ = द्व्यूनाङ्कयोगस्य सङ्कलितम्। तत्रैव यद्यङ्कयोगः = ४ तदा संख्याः = ११२, १२१, २११। अतः संख्याभेदाः = ३ = द्व्यूनाङ्कयोगस्य सङ्कलितम्। तत्रैव यद्यङ्कयोगः = ५, तदा संख्याः = ११३, १२२, १३१, २२१, ३११। अतः संख्याभेदाः = द्व्यूनाङ्कसङ्कलिततुल्याः। एवमग्रेऽपि संख्यायां स्थानत्रये द्व्यूनाङ्कयोगस्य सङ्कलिततुल्या भेदा भवन्त्यतो द्व्यूनाङ्कयोगपदे सैकपदघ्नपदार्धमित्यादिना सङ्कलितस्वरूपम्

$$= \frac{(\text{अं· यो} - 1)}{1} \times \frac{(\text{अं· यो} - 2)}{2} = \text{संख्या भेद।}$$

यदि संख्यायां स्थानचतुष्टयं तथाङ्कयोगः = ४, तदा संख्या = ११११। अतः संख्याभेदः = १। यदि तत्राङ्क योगः = ५ तदा संख्याः = १११२, ११२१, १२११, २१११। अतः संख्याभेदाः = ४। यदि तत्रैव अङ्कयोगः = ६ तदा संख्याः = १११३, ११२२, ११३१, १२१२, १२२१, १३११, २११२, २१२१, २२११, ३१११। अतः संख्याभेदाः = १०। एवमग्रेऽपि स्थानचतुष्टये त्र्यूनाङ्कयोगस्य सङ्कलितैक्यसमा भेदा दृश्यन्तेऽतस्त्र्यूनाङ्कयोगपदे सैकपदघ्नपदार्धमित्यादिना सङ्कलितस्य स्वरूपम् $= \frac{(\text{अङ्कयोग} - 2)(\text{अङ्कयोग} - 3)}{2}$। ततः साद्वियुतेन पदेनेत्यादिना सङ्कलितैक्यस्य रूपम्

$$= \frac{(\text{अं· यो} - 2)(\text{अं· यो} - 3)(\text{अं· यो} - 1)}{2 \times 3} = \text{सं· भेदाः}$$

$$= \frac{(\text{अं· यो} - 1)}{1} \times \frac{(\text{अं· यो} - 2)}{2} \times \frac{(\text{अं· यो} - 3)}{3}$$ एवमग्रेऽप्यत

उपपन्नं 'निरेकमङ्कैक्यमिदमित्यादि नियतेऽङ्कयोगे' इत्यन्तम् । अत्रैवानीतभेदेषु नवाधिका कापि संख्या माभूदित्येतदर्थं 'नवान्वितस्थानकसंख्यकाया ऊनेऽङ्कयोगे कथितमिति भास्करोक्तं युक्तियुक्तम् ।

उदाहरणम् ।

पञ्चस्थानस्थितैरङ्कैर्यद्योगस्त्रयोदश ।
कति भेदा भवेत्संख्या यदि वेत्सि निगद्यताम् ॥ १ ॥

५ स्थान वाली संख्या के अङ्कों का योग १३ है तो उनके भेद बताओ ।

अत्राङ्कैक्यम् १३ निरेकम् १२ । एतन्निरेकस्थानान्तमेकापचितमेकादिभिश्च भक्तं जातम् $\frac{१२}{१}$ $\frac{११}{२}$ $\frac{१०}{३}$ $\frac{९}{४}$ । एषां घातसमा जाताः संख्याभेदाः ॥ ४९५ ॥

इति श्रीलीलावत्यामङ्कपाशः ।

उदाहरण—यहाँ अङ्कों का योग १३, तथा स्थान संख्या ५ है । अब सूत्र के अनुसार अङ्कयोग १३ में १ घटाने से १२ हुआ । इसको निरेक स्थान संख्या अर्थात् ४ जगहों में एकापचित क्रम से रख कर उनको एक आदि संख्या से क्रम से भाग देने पर $\frac{१२}{१}$, $\frac{११}{२}$, $\frac{१०}{३}$ और $\frac{९}{४}$ हुए । इनका घात = $\frac{१२}{१} \times \frac{११}{२} \times \frac{१०}{३} \times \frac{९}{४}$ = ११ × ५ × ९ = ४९५ संख्या का भेद हुआ ।

न गुणो न हरो न कृतिर्न घनः पृष्टस्तथापि दुष्टानाम् ।
गर्वितगणकबहूनां स्यात्पातोऽवश्यमङ्कपाशेऽस्मिन् ॥ १ ॥

येषां सुजातिगुणवर्गविभूषिताङ्गी
शुद्धाऽखिलव्यवहृतिः खलु कण्ठसक्ता ।
लीलावतीह सरसोक्तिमुदाहरन्ती
तेषां सदैव सुखसम्पदुपैति वृद्धिम् ॥ २ ॥

इति श्रीभास्कराचार्यविरचिते सिद्धान्तशिरोमणौ
लीलावतीसंज्ञः पाट्यध्यायः सम्पूर्णः ॥
लीलावत्यां वृत्तसंख्या २६६ ।

अस्मिन् अङ्कपाशे न गुणः, न हरः, न कृतिः, न घनः अस्ति, तथापि दुष्टानां गर्वितगणकबटूनां पृष्टः सन् अवश्यं पातः स्यात् ।

इस अङ्कपाश में न गुणक है, न हर है, न वर्ग है और न घन है, तो भी दुष्ट अभिमानी गणक बटु को इसका प्रश्न पूछने पर निश्चय शिर झुक जाता है ।

येषां (छात्राणां, यूनां च), सुजातिगुणवर्गविभूषिताङ्गी (भागप्रभाग-गुणकर्मवर्गादियुक्ता, वा सत्कुलोत्पन्नसुशीलादिगुणगणालङ्कृतशरीरा) शुद्धा-खिलव्यवहृतिः (शुद्धसकलमिश्रकादिव्यवहारयुक्ता शुद्धाखिलव्यवहारवती वा) सरसोक्ति (साहित्यिकं प्रश्नं रसमयीं मधुरां वाचं वा) उदाहरन्ती (कथयन्ती आलपन्ती वा) लीलावती (एतदाख्यं गणितं वा हास्यविलासादिरतिक्रीडाभिज्ञा प्रियतमा) कण्ठसक्ता (कण्ठस्था, हृदयलग्ना वा) अस्ति तेषां (छात्राणां यूनाञ्च) इह (अस्मिन् लोके) खलु (निश्चयेन) सुखसम्पत् सदैव वृद्धिं (उपचयं) उपैति (प्राप्नोति) ।

जिन छात्रों को भाग–प्रभाग, गुणक वर्ग आदि कर्मों से तथा शुद्ध मिश्रक श्रेढी आदि व्यवहारों से युक्त सरस बात को कहती हुई लीलावती नाम की पुस्तक का अभ्यास है, उन्हें हमेशा इस लोक (दुनियाँ) में सुख और सम्पत्ति की वृद्धि होती है ।

अथवा

जिन युवकों की अच्छे वंश में उत्पन्न, सुशील आदि गुणों से युक्त शुद्ध व्यवहार वाली एवं कोमल तथा मधुर भाषण करने वाली पत्नी मिलती है, उनकी सुख–सम्पत्ति निश्चय ही इस जगत में हमेशा बढ़ती रहती है ।

कराष्टगजभूतुल्ये शालिवाहनवत्सरे । 'वैद्यनाथ' प्रसादेन टीकेयं पूर्णतां गता ॥१॥
व्यावहारिकसत्तायां चतुरा गुणभूषिता । 'लीलावतीव' टीकेयं पठतामतिमोददा ॥२॥

इति मिथिलादेशावयवदरभङ्गामण्डलान्तर्गत'हिरणी'ग्रामवासिपण्डित-
श्रीलषणलालझाविरचितसान्वयसोपपत्तिसोदाहरणनूतन-
गणितोपेततत्त्वप्रकाशिकाहिन्दीव्याख्योपेता
'लीलावती' समाप्ता ।

परिशिष्ट

दिनांक १-१०-१९५८ ई० से प्रचलित मैट्रिक प्रणाली

१००० ग्राम = १ किलोग्राम।

१०० किलो ग्राम = १ क्विण्टल।

१०० ग्राम = ८½ तोला

२०० " = १७ तोला

४०० " = ३४ तोला

५०० " = ४३ तोला

प्रति छटाँक पर ग्राम जानने की सारिणी:—

छटाक	१	२	३	४	५	६	७	८
ग्राम	५८	११७	१७५	२३३	२९२	३५०	४०८	४६७
छटाक	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६
ग्राम	५२५	५८३	६४२	७००	७५८	८१६	८७५	९३३

एक सेर से दो सेर तक का ग्राम:—

१ सेर = ९३३ ग्राम। १ सेर ४ छटाक = १ किलो ग्राम १६६ ग्राम। १ सेर ८ छटाक = १ किलोग्राम ४०० ग्राम। १ सेर १२ छटाक = १ किलो० ६३३ ग्राम। २ सेर = १ किलो० ८६६ ग्राम।

प्रति सेर पर किलोग्रामादि जानने की सारिणी:—

सेर	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
कि.ग्रा.	००	१	२	३	४	५	६	७	८	९
ग्राम	९३३	८६६	७९९	७३२	६६५	५९९	५३२	४६५	३९८	३३१
सेर	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०
कि.ग्रा.	१०	११	१२	१३	१३	१४	१५	१६	१७	१८
ग्राम	२६४	१९७	१३०	६३	९९६	९३०	८६३	७९६	७२९	६६२
सेर	२१	२२	२३	२४	२५	२६	२७	२८	२९	३०
कि.ग्रा.	१९	२०	२१	२२	२३	२४	२५	२६	२७	२७
ग्राम	५९५	५२८	४६१	३९४	३२७	२६१	१९४	१२७	६०	९९३
सेर	३१	३२	३३	३४	३५	३६	३७	३८	३९	४०
कि.ग्रा.	२८	२९	३०	३१	३२	३३	३४	३५	३६	३७
ग्राम	९२६	८५९	७९२	७२५	६५८	५९२	५२५	४५८	३९१	३२४

मन से क्विण्टल आदि जानने की सारिणी:—

मन	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
क्विण्टल	०	०	१	१	१	२	२	२	३	३
कि.ग्रा.	३७	७४	११	४९	८६	२३	६१	९८	३५	७३
ग्राम	३२४	६४८	९७३	२९७	६२१	९४५	२६९	५९३	९१८	२४२
मन	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	२००
क्विण्टल	७	११	१४	१८	२२	२६	२९	३३	३७	७४
कि.ग्रा.	४६	१९	९२	६६	३९	१२	८५	५९	३२	६५
ग्राम	४८४	७२५	९६७	२०९	४५१	६९२	९३४	१७६	४१८	८३६

बाजार भावार्थ प्रतिमन नया पैसा के हिसाब से प्रति किण्टल का नया पैसा जानने की सारिणी :—

प्रति मन १ नया पैसा = प्रति क्विण्टल ३ नये पैसे ।

इस तरह नीचे के चक्र से समझें ।

प्र. म. । प्र. कि.	प्र. म. । प्र. कि.	प्र. म. । प्र. कि.	प्र. म. । प्र. कि.	प्र. म. । प्र. कि.
२ = ५	१३ = ३५	२४ = ६४	३५ = ९४	४६ = १२३
३ = ८	१४ = ३८	२५ = ६७	३६ = ९६	४७ = १२६
४ = ११	१५ = ४०	२६ = ७०	३७ = ९९	४८ = १२९
५ = १३	१६ = ४३	२७ = ७२	३८ = १०२	४९ = १३१
६ = १६	१७ = ४६	२८ = ७५	३९ = १०५	५० = १३४
७ = १९	१८ = ४८	२९ = ७८	४० = १०७	६० = १६१
८ = २१	१९ = ५१	३० = ८०	४१ = ११०	७० = १८८
९ = २४	२० = ५४	३१ = ८३	४२ = ११३	८० = २१४
१० = २७	२१ = ५६	३२ = ८६	४३ = ११५	९० = २४१
११ = २९	२२ = ५९	३३ = ८८	४४ = ११८	१०० = २६८
१२ = ३२	२३ = ६२	३४ = ९१	४५ = १२१	

इससे सिद्ध होता है कि १०० न. पैं. = २६८ न. पै. । अर्थात् १ रु. = २ रु. ६८ न. पै. । यदि प्रतिमन १ रुपया हो तो, प्रति क्विण्टल २ रु. ६८ न. पै. होंगे । इसको द्विगुणित करने से प्रति मन दो रुपये बराबर होंगे प्रति क्विण्टल ५ रु. ३६ नये पैसे के । आगे भी इसी तरह जानना चाहिये । इति ॥

गणित सम्बन्धी कुछ पाश्चात्य शब्दों के नाम

जोड़ = Addition (एडीसन)
घटाव = Subtraction (सबट्रैक्सन)
गुणा = Multiplication (मल्टीप्लीकेसन)
भाग = Division (डिभीजन)
वर्ग = Square (स्कायर)
वर्गमूल = Square root (स्कायर रूट)
घन = Cube (क्यूब)
घनमूल = Cube root (क्यूब रूट)
भिन्न = Fraction (फ्रैक्सन)
अंश = Numerator (न्यूमरेटर)
हर = Denominator (डिनोमिनेटर)
महत्तमापवर्तन = Greatest Common Measure (ग्रेटेस्ट कौमन मीजर)
G. C. M.

लघुत्तमावर्त्य = Lowest Common Multipul (लोवेस्ट कौमन मल्टीपुल)
अपवर्तन = Common Factor (कौमन फैक्टर)
पूर्णाङ्क = Whole number (होल नम्बर)
दशमलव = Decimal Fraction (डेसीमल फ्रक्सन)
त्रैराशिक = Rule of three (रूल आफ थ्री)
व्यस्त त्रैराशिक = Inverse rule of three (इनभर्स रूल आफ थ्री)
मिश्रयोग = Compound Addition (कम्पौन्ड एडिसन)
मूलधन = Principal (प्रिंसिपल)
मिश्रधन = Amount (एमौन्ट)
कलान्तर = Interest (इन्टरेस्ट)
श्रेढ़ी (योगान्तर) Arithmetical Progression (एरीथमेटीकल प्रोग्रेसन)
श्रेढ़ी (गुणोत्तर) Geometrical Progression (ज्योमेट्रीकल प्रोग्रेसन)
विलोमरीति = Converse method (कनभर्स मेथड)
क्षेत्रफल = Area (एरीआ)
श्रेढ़ीफल = श्रेढ़ी का योग Addition of series (एडीसन आफ सारीज)

अन्तधन = Last term of series (लास्ट टर्म आफ़ सीरीज)
क्षेत्र = Figure (फीगर)
वृत्त = Circle (सर्किल)
परिधि = Circumference (सरकमफ्रेन्स)
व्यास = Diameter (डाइमीटर)
त्रिज्या = Radius (रेडियस)
घनफल = Volume (भौलुम)
त्रिभुज = Triangle (ट्रैन्गिल)
चतुर्भुज = Quadrilateral (क्वाड्रीलेटरल)
वर्गक्षेत्र = Square (स्क्वायर)
आयत = Rectangle (रेक्टैन्गिल)
कर्ण = Diagonal (डाइगनल)
लम्ब = Perpendicular (परपेन्डीकुलर)
भुजा = Side (साइड)
अवधा = Segment (सिगमेन्ट)
चाप = Arc (आर्क)
वेध = Deapth (डेप्थ)
आसन्नमान = Approximate Value (एप्रोक्सिमेट भैल्यू)
अस्र = Angle (एन्गिल)
समानान्तर चतुर्भुज = Parallelogram (पैरलेलोग्राम)
समद्विबाहुत्रिभुज = Issosceless triangle (आइसोसलेस ट्रैन्गिल)
कुट्टक = Indeterminate Multiple (इनडीटरमीनेट मल्टिपुल)

'लीलावती' सम्बन्धी कतिपय संकेतयुक्तशब्दों का अर्थ

संकलित = जोड़ ।
व्यवकलित = घटाव ।
योज्य = जिसमें जोड़ा जाय ।
योजक = जोड़ने वाला अङ्क ।
शोध्य = जिसमें घटाया जाय ।
शोधक = जो घटाया जाय ।
गुणन = गुना ।
गुण्य = गुना करने योग्य ।
गुणक = जिससे गुना किया जाय ।
भागहार = संख्या विशेष को कई अंशों में बाँटने की रीति ।
भाज्य = बाँटने योग्य ।
भाजक = भाग करने वाला ।
छेद = हर ।
वर्ग = समान दो अङ्कों का घात ।
वर्गमूल = जिसका वर्ग किया हो ।
घन = समान तीन अङ्कों का घात ।
घनमूल = जिसका घन किया हो ।
भिन्न = वह संख्या जो पूर्ण संख्या से कम हो ।
समच्छेद = हरों का समानीकरण ।
भिन्न परिकर्माष्टक = भिन्नाङ्कों के योगादि विधि ।
भागजाति = जिसमें हर और अंश दोनों पूर्णाङ्क हो ।
प्रभाग जाति = भाग का भी भाग लेकर गणित हो या हर और अंश दोनों अपूर्णाङ्क हो ।
भागानुबन्ध = अपने अंश से युत राशि
भागापवाह = अपने अंश से हीन राशि
व्यस्त विधि = विलोम रीति ।
इष्टकर्म = कल्पित इष्ट वश राशिज्ञान की विधि ।
द्वीष्टकर्म = दो इष्टवश राशिज्ञान की रीति ।
शेषजाति = शेष के निकाले, तुलन करने का कार्य या जो प्रश्न शेष से सम्बन्ध रखे ।
विश्लेष जाति = जो प्रश्न भागद्वयान्तर से सम्बन्धित हो ।
संक्रमण = राशिद्वय के योग और अन्तर ज्ञान से राशि ज्ञान की विधि ।
वर्गकर्म = राशिद्वय के वर्ग योग वर्गान्तर में एक घटाने पर वर्गात्मक शेष निकालने की रीति ।
गुणकर्म = इष्ट गुणित अपने मूल ऊन या युत दृश्य राशि से या केवल अपने अंशों से ऊन या युत दृश्य राशि वश राशिज्ञान की विधि ।
त्रैराशिक = तीन ज्ञात राशि वश चतुर्थ राशि जानने की विधि ।
प्रमाण = किसी अनुपात का प्रथम पद
प्रमाण फल = अनुपातीय द्वितीय पद
इच्छा = अनुपातीय तृतीय पद ।
इच्छा फल = अ० चतुर्थ पद ।
व्यस्त त्रैराशिक = इच्छा की वृद्धि में फल की कमी या इच्छा की कमी में फल की वृद्धि ।

पञ्चराशिक = चार राशि के ज्ञान से पञ्चम राशि जानने का नियम।

भाण्ड प्रति भाण्ड = विनिमय।

मिश्रक व्यवहार=मिश्रित (अनेक गणित) गणित की पद्धति।

प्रक्षेपक = साझे में किसी साझा का लगाया धन।

कलान्तर = सूद।

प्रयुक्तखण्ड = सूद पर दिये हुये धन के टुकड़े।

सुवर्ण वर्ण = सुवर्ण का भाव।

श्रेढ़ी व्यवहार = श्रेढ़ी गणना का एक उपाय।

श्रेढ़ी = भिन्न जातीय द्रव्यों को मिलाने के लिये गणनाभेद।

श्रेढ़ी फल = श्रेढ़ी का योग।

संकलित = क्रमगुणित या एकादि अंकों का योग।

संकलितैक्य = एकादि अंकों के संकलित का योग।

आदि = श्रेढ़ी का प्रथम पद।

चय = वृद्धि।

गच्छ = पद।

अन्तधन = श्रेढ़ी का अन्तिम पद।

मध्यधन = श्रे० मध्य पद।

सर्वधन = श्रेढ़ी के पदों का योग।

क्षेत्र व्यवहार = क्षेत्र सम्बन्धी गणित की पद्धति।

भुज = समकोण त्रिभुज का आधार।

कोटि = समकोण त्रिभुज की ऊँचाई।

अवधा = अबाधा = खण्ड।

सम्पात = कटान।

धनुष = चाप।

वेध = गहराई।

परधि = घेरा।

व्यास = वृत्त की बीच की दूरी।

खात व्यवहार = खात सम्बन्धी क्षेत्रफल आदि गणित की पद्धति।

चिति व्यवहार = वह गणित जिस से किसी दीवार में लगने वाली ईंटों, ढोंकों की गिनती मालूम की जाय।

क्रकच व्यवहार=चिराने वाली लकड़ी की गणित रीति।

राशि व्यवहार = धान्य आदि राशि (ढेर) की मापन विधि।

छाया व्यवहार = छाया, शंकु आदि जानने का गणित।

कुट्टक = जो गणित ऐसा गुणक लावे जिससे निर्दिष्ट संख्या को गुना कर उस में कुछ जोड़ या घटाकर फिर किसी निर्दिष्ट संख्या से भाग देने पर लब्धि शून्य हो।

अंकपाश = गणित की एक क्रिया (इसमें स्थान संख्या और अंक योग वश भेद निकाला गया है)।

॥ इति परिशिष्टं समाप्तम् ॥

अथोपसंहारश्लोकाः

स्वर्गादपि या गुर्वी धात्रीशक्तेः पराम्बायाः।
मन्त्रतया मिथिलोर्वी नित्यं धातुस्तुका-कोटौ ॥ १ ॥
यस्या गुरुतामाप्तुं दरभंगाया मिषेणैत्य।
मन्ये विष्णोः पूरपि शश्वत्सेवा-परो भाति ॥ २ ॥
तस्यां कमला-त्रियुगानद्योर्मध्ये "कुशेश्वरो" यत्र।
कुश-मुनितपसा तुष्टो भूमेः सम्भूय शोभते शम्भुः ॥ ३ ॥
क्रोशमिते तत्-पश्चिमदिग्भागे "श्री हिरण्यदा" देव्याः।
पीठे "हिरणी"त्याख्यया-ख्यातो ग्रामो विराजतेऽद्यापि ॥ ४ ॥
श्री-विद्यासम्पन्नैः सद्विप्रैः सेविते तस्मिन्।
उद्यद्दिनमणिकल्पः सत्संकल्पोऽस्पिताऽऽरातिः ॥ ५ ॥
आसीत् शाण्डिल्यगोत्रोद्भूतो, नरसिंहसेवया पूतः।
"श्रीसन्तलालशर्मा" सोपाख्यः ख्यात-नामासौ ॥ ६ ॥
तत्तनयत्रितयेषु, ज्येष्ठः श्रेष्ठो वरिष्ठश्च।
जातः षट्कर्म-धर्मा "बल्लोशर्मा" महानात्मा ॥ ७ ॥
साक्षाद् भारत-जगती "जगती देवी" बभूव तज्जाया।
तस्यां तदात्मजातः, सोऽहं दुर्दैव-पीडितो बाल्ये ॥ ८ ॥
तातविहीनो दीनः क्षीणप्रज्ञोऽपि सद्गुरोः कृपया।
ज्योतिस्तटिनी-विहरण-कलकादम्बोऽस्मि सम्वृत्तः ॥ ९ ॥
तत्परिणतिरूपेयं टीका रचिता मया ह्यत्र।
तेषामेव श्रेयो ये गुरवोऽदुः[1] कलां मह्यम् ॥ १० ॥

नव्योऽपि भव्यो गणितोऽतियत्ना-
न्निवेशितोऽस्यां सरल-प्रणाल्या।
साकं पुराचीनमतेन, येन-
विद्यार्थिनः स्युः सफलप्रयत्नाः ॥ ११ ॥

लीलावत्या इमां टीकां नाम्ना तत्त्वप्रकाशिकाम्।
भव-रोग-भयघ्नन्तं वैद्यनाथं समर्पये ॥ १२ ॥

(इति श्रीवैद्यनाथार्पणमस्तु)

---

१. श्री श्रीकान्तझा, स्व० पं० गङ्गाधर मिश्र, पं० श्रीमुरलीधर ठक्कुर।

प्रश्नपत्राणि

१. यदि समभुवि वेणुर्द्वित्रिपाणिप्रमाण इत्यादिपद्यं व्याख्याय गणितं लेख्यम् ।

२. यत्र त्र्यस्रे भुजकोटियोगः = २३ कर्णः = १७ तत्र भुजकोटिमाने के ?

३. उच्छ्रयेण गुणितं चितेः किल क्षेत्रसम्भवफलं घनमित्यादिसूत्रं व्याख्याय अत्रैकमुदाहरणमङ्गीकृत्य सूत्रस्यास्य चरितार्थता प्रदर्शनीया ।

४. नन्दचन्द्रैर्मितं छाययोरन्तरं विश्वतुल्यं ययोरित्याद्युदाहरणगणितं प्रदर्शयत ।

५. चतुर्भुजक्षेत्रे भुजाः ५१, ६८, ७५, ४० एकः कर्णः ७७ अत्र क्षेत्रफलं किम् ?

६. भित्तिबहिष्कोणलग्नधान्यराशेः परिधिमानमङ्गुलात्मकं ५७६ तदा सूक्ष्मादिधान्यखारीप्रमाणानि कियन्ति ?

७. शङ्कुदीपान्तरं ३, शङ्कुः १/२, छाया १/३, तत्र दीपौच्च्यं कियत् ?

८. कर्णः १७ भुजकोटियोगः २३ अत्र भुजकोटी के ?

९. व्यासः ७ अत्र गोलपृष्ठफलं किम् ?

१०. छायान्तरं १९ कर्णान्तरं १३ । अत्र प्रभे के ?

११. (अ) २/३, ३/४, ४/५ एषु कः महत्तमः ?

(ब) ३/४ + ४ १/४ × ७/८ ÷ ५/१२ − २/३ । सरलीक्रियताम् ।

१२. केनापि पुरुषेण स्वधनस्य तृतीयांशः (१/३) ज्येष्ठपुत्राय, चतुर्थांशः (१/४) कनिष्ठपुत्राय, अवशिष्टोऽशः कन्यायै वितीर्णः । यदि कन्यया लब्धं धनं पुत्रद्वयलब्धधनात्, रूप्यकाणां सहस्रचतुष्टयं (४०००) न्यूनमस्ति, तर्हि विभागात्पूर्वं पितुर्धनपरिमाणं ब्रूहि ।

१३. कस्यचित्पुरुषस्य स्वकर्मणि नियुक्तेन कर्मकरेण, कर्मकरणे प्रत्यहं रूप्यकमेका भृतिः। अकरणे च प्रत्यहं पादोनरूप्यकम् दण्डत्वेन प्रत्यर्पणीयमिति समयबन्ध आसीत्। तत्समयबद्धेन कर्मकरेण षट्पञ्चाशदधिकत्रिशत (३५६) दिनानन्तरं रूप्यकाणामष्टादशाधिकशत(११८)मर्जितम्। अत्र कर्मदिनसंख्या का ?

१४. द्रम्मत्रयं यः प्रथमेऽह्नि दत्त्वा दातुं प्रवृत्तो द्विचयेन तेन।
शतत्रयं षष्ठ्यधिकं द्विजेभ्यो दत्तं कियद्भिर्दिवसैर्वदाशु॥

१५. अनियतत्वेऽपि नियतयोरेव कर्णयोरानयने ब्रह्मगुप्तेन कर्णाश्रितभुजघातैक्येत्यादिना या प्रक्रिया प्रदर्शिता, तत्र गौरवप्रदर्शनमुखेन भास्करोक्ताभीष्टजात्यद्वयबाहुकोटय इत्यादि लघुक्रियया अभीष्टजात्यद्वयकल्पनया कर्णौ साधनीयौ।

१६. शतं हतं येन युतं नवत्या विवर्जितं वा विहृतं त्रिषष्ट्या।
निरग्रकं स्याद्वद मे गुणं तं स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि॥

१७. पाशाङ्कुशाहिडमरूककपालशूलैः खट्वाङ्गशक्तिशरचापयुतैर्भवन्ति।
अन्योऽन्यहस्तकलितैः कति मूर्तिभेदाः शम्भोर्हरेरिव गदारिसरोजशङ्खैः॥
पद्यमिदं सगणितं व्याख्यायताम्।

१८. केनचित्पुरुषेण विदेशं गत्वा कियद्दिनानन्तरमनुभूतं, यद् गृहाद् बहिरवस्थानकाले विदेशस्थितिदिनसङ्ख्यार्द्धतुल्यरूप्यकव्ययः प्रतिदिनमभूत्। यदि विदेशयात्रायां तस्य पुरुषस्य अष्टादशशत(१८००)रूप्यकाणां व्ययोऽभवत्, तदा गृहाद्बहिरवस्थानदिनसङ्ख्या का ?

१९. बालकानां पञ्चशती (५००) त्रिषु गृहेषु स्थापिता अस्ति। तत्र लघुगृहे समूहस्य $\frac{७}{२८}$ बालकाः सन्ति। बृहद्गृहे च लघुगृहगतबालकसंख्यायाः $\frac{१९}{१७}$ बालकाः सन्ति, तर्हि प्रत्येकगृहगतबालकसङ्ख्या आनेयाः।

२०. यत्र त्रिभुजे भुजौ १०, १७ मही च ९ तत्र लम्बाबाधाफलानि साध्यानि।

२१. मधुकरसमूहाद्द्वौ मधुकरौ सरोवरस्य[illegible]तौ। अर्द्धं हस्तिगण्डे गतम्। समूहस्य मूलपरिमितसङ्ख्यका मधुकरा नवमल्लिकां गताः। अन्ते च [illegible]यं द्वयमासीत्तदा समूहस्थमधुकरसङ्ख्या का ?

२. वाप्यामेकस्यां तिस्रो जलनलिकाः प्रतिबद्धाः सन्ति । तासु एका ५, द्वितीया ६, तृतीया च ७½ पलमितेषु कालेषु वापीं पूरयति । ताः सर्वा वापीपूरणार्थं सहैव विमुक्ताः । एकपलानन्तरं प्रथमाऽवरुद्धा । तदा शेषाभ्यां जलनलिकाभ्यां वापीपूरणकालः कः ?

१. माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं,
सद्वज्राणि च पञ्चरत्नवणिजां येषां चतुर्णां धनम् ।
सङ्गस्नेहवशेन ते निजधनाद्दत्त्वैकमेकं मिथो,
जातास्तुल्यधनाः पृथग् वद सखे तद्रत्नमौल्यानि मे ॥

३. वर्गाकारस्यैकस्य क्षेत्रस्यैका भुजा षट्शत(६००)हस्तपरिमिताऽस्ति । क्षेत्रस्य समन्तात् दश(१०)हस्तविस्तृतेन मार्गेण परिवेष्टितं विद्यते । अस्य मार्गस्य शिलावृतकरणे कियान् व्ययो भविष्यति, यदि शत(१००)वर्ग-हस्तस्य परिमितस्य मार्गस्य शिलावृतकरणव्ययः सार्द्धरूप्यकद्वयं (२½) भवेत् ।

४. शङ्कोर्भाऽर्कमिताङ्गुलस्य सुमते दृष्टा किलाष्टाङ्गुला
छायाग्राभिमुखे करद्वयमिते न्यस्तस्य देशे पुनः ।
तस्यैवार्कमिताङ्गुला यदि तदा छायाप्रदीपान्तरं
दीपौच्च्यं च कियद्वद व्यवहृतिं छायाभिधां वेत्सि चेत् ॥

५. (अ) $८\frac{५}{६३}$ अस्य भिन्नाङ्कस्य वर्गं वद ।

(ब) ११११ अस्याः संख्यायाः आद्याङ्करीत्या घनः कः ?

६. पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे संदधे,
तस्यार्धेन निवार्य तच्छरगणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ।
शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपि च्छत्रं ध्वजं कार्मुकम्,
चिच्छेदास्य शिरः शरेण कति ते यानर्जुनः संदधे ॥
पद्योक्तं गणितं व्याख्यासहितं प्रदर्शय ।

२८. यदि शतस्य वार्षिकं कलान्तरं ५ तदा चतुर्भिरब्दैरस्य १४८ मिश्रधनस्य किमिति प्रदर्श्यताम् ।

२९. अशीत्या (८०) दिवसैः किञ्चित्कार्यं निष्पादयितुं केनचित्पुरुषेण त्रिंशत् (३०) कर्मकरा नियोजिताः । तैश्च कर्मकरैः पञ्चाशता (५०) दिनैः तत्कर्मणोऽर्धं ($\frac{1}{2}$) निष्पादितम् । तर्हि कर्मणो यथाकालपूर्त्यर्थं अन्ये कति कर्मकराः नियोजयितव्यास्तद्वद ।

३०. पञ्चवर्गसमे कर्णे दोःकोट्योरन्तरं यदा ।
सप्तेन्दुसदृशं मित्र ! भुजकोटी पृथग् वद ॥

३१. दशविस्तृतिवृत्तान्तर्यत्र ज्या षण्मिता सखे ।
तत्रेषु वद बाणाज्ज्यां ज्याबाणाभ्यां च विस्तृतिम् ॥

३२. शङ्कुप्रदीपान्तरभूस्त्रिहस्ता दीपोच्छ्रितिः सार्धकरत्रया चेत्,
शङ्कोस्तदाऽर्काङ्गुलसम्मितेत्यत्र प्रभा का ।

12789